

KETTEN-KOMPAKTE RÄUME

INAUGURAL-DISSERTATION

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Freien Universität Berlin

vorgelegt von

Peter Brucker

aus Berlin

1969

KETTEN-KOMPAKTE RÄUME

INAUGURAL-DISSERTATION

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Freien Universität Berlin

vorgelegt von

Peter Brucker

aus Berlin

1. Referent: Privatdozent Dr. H. Herrlich

2. Referent: Professor Dr. K.P. Grotemeyer

Tag der mündlichen Prüfung: **19. DEZ. 1968**

Tag der Promotion: **17. FEB. 1969**



Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
Kapitel I : Kettenkompakte Räume	
§ 1 E-reguläre und E-kompakte Räume	9
§ 2 Ketten und K-Verbände	13
§ 3 K-Homomorphismen von $C(X, K)$ in K für kom- pakte Räume X	19
§ 4 Eine Kennzeichnung K-kompakter Räume	32
§ 5 Diskrete topologische Räume	35
§ 6 K-Homomorphismen und Ringhomomorphismen	38
Kapitel II : Dualität	
§ 7 Kategorielle Grundbegriffe	41
§ 8 Allgemeine Dualitätssätze	42
§ 9 Dualität zwischen der Kategorie der Mengen und Produktkategorien von Ketten	47
§ 10 Die Kategorien $\mathcal{C}(K)$	49
§ 11 Folgerungen aus der Dualität	56
Literaturverzeichnis	59

Digitized by the Internet Archive
in 2026

Einführung

0.1 E-reguläre und E-kompakte Räume

Mrowka [14] führte 1958 den Begriff des E-kompakten Raumes ein und entwickelte gemeinsam mit Engelking eine Theorie der E-regulären und E-kompakten Räume [4]. Sie zeigten, daß man E-reguläre bzw. E-kompakte Räume als Unterräume bzw. abgeschlossene Unterräume von Produkten des Raumes E charakterisieren kann. Im Falle $E=I$ und $E=\mathbb{R}$, wobei I das Einheitsintervall und $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen, jeweils versehen mit den üblichen Topologien, sind, erhält man als E-reguläre Räume die vollständig regulären Räume und als E-kompakte Räume die kompakten und reellkompakten Räume. Der zweielementige Raum D erzeugt die Klassen der nulldimensionalen und nulldimensionalen kompakten Räume. Herrlich [8] verallgemeinerte obige Theorien in dem Sinne, daß er den Raum E durch eine Klasse von T_2 -Räumen ersetzte.

Jedem E-regulären Raum X läßt sich ein E-kompakter Raum $\beta_E X$ und eine stetige Abbildung β_E von X in $\beta_E X$ zuordnen, wobei das Paar $(\beta_E, \beta_E X)$ dadurch universell gekennzeichnet ist, daß sich eine beliebige stetige Abbildung von X in einen E-kompakten Raum in eindeutiger Weise zu einer stetigen Abbildung von $\beta_E X$ in diesen Raum fortsetzen läßt. In der vorliegenden Arbeit werden E-kompakte Räume für den Fall, daß E eine Kette (total geordnete Menge), die man mit der Ordnungstopologie versieht, untersucht. Um Ergebnisse der Theorie der kompakten Räume auf andere Klassen kettenkompakter Räume übertragen zu können, ist der folgende Satz von großer Bedeutung.

Satz A

- (a) Es seien E ein beliebiger topologischer Raum, X ein E-kompakter, vollständig regulärer Raum und $S(E)$ ein kompakter Raum, in dem E eingebettet ist. Dann gibt es zu jedem $x \in \beta_I X \setminus \beta_I(X)$ ein $f \in C(\beta_I X, S(E))$ mit $f \beta_I(X) \subseteq E$ und $f(x) \notin E$.

(b) Es seien E ein nulldimensionaler topologischer Raum, X ein E -kompakter Raum und $S(E)$ ein nulldimensionaler kompakter Raum, in dem E eingebettet ist. Dann gibt es zu jedem $x \in \beta_D X \setminus \beta_D X$ ein $f \in C(\beta_D X, S(E))$ mit $f \beta_D(X) \subseteq E$ und $f(x) \notin E$.

0.2 Ketten und K-Verbände

Eng verbunden mit einem K -kompakten Raum X ist der Verband aller stetigen Funktionen von X in K , in dem die Kette K in natürlicher Weise eingebettet ist. Ein solcher Verband heiße K -Verband. Homomorphismen zwischen K -Verbänden, die mit den Einbettungen verträglich sind, nennen wir K -Homomorphismen. Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, die Beziehungen zwischen der Kategorie aller K -kompakten Räume mit stetigen Abbildungen und der zugehörigen Kategorie der K -Verbände und K -Homomorphismen zu untersuchen.

Jede Kette läßt sich in eine kompakte Kette, nämlich ihrer Dedekindvervollständigung, einbetten. Betrachtet man nulldimensionale Ketten, so sind ihre Dedekindvervollständigungen im allgemeinen nicht nulldimensional. Um Satz A anwenden zu können, benötigt man jedoch eine nulldimensionale Vervollständigung. Es wird gezeigt, daß man für eine nulldimensionale Kette K eine solche erhält, indem man jede Lücke in K nicht wie bei der Dedekindschen Konstruktion mit einem Element, sondern mit zwei unmittelbar aufeinanderfolgenden Elementen auffüllt.

0.3 Feste K -Homomorphismen

Betrachtet man die Klasse aller endlichdimensionalen Vektorräume über einem Körper K , so gilt für jedes lineare Funktional $\psi: \text{Hom}(V, K) \rightarrow K$ $\psi(f) = f(x)$ für alle $f \in \text{Hom}(V, K)$, wobei x ein Element des Vektorraums V ist. Hieraus ergibt sich, daß der bidual Raum von V in natürlicher Wei-

se äquivalent zu V ist. Dies gilt im allgemeinen nicht für beliebige Vektorräume. In der Funktionalanalysis stellt man ähnliche Betrachtungen an. Sie führen zu folgendem allgemeinen Ergebnis: für reellkompakte Räume X ist jeder Ringhomomorphismus $\psi: C(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ fest in X , das heißt es gilt ein $x \in X$, so daß $\psi(f) = f(x)$ für alle $f \in C(X, \mathbb{R})$. In dieser Arbeit wird die entsprechende verbandstheoretische Fragestellung in den Vordergrund gestellt. Wann ist für einen topologischen Raum X und eine Kette K jeder K -Homomorphismus von $C(X, K)$ in K fest in X ? Zunächst wird der Fall, daß X kompakt ist untersucht. Ist $C(X, K)$ K -separierend, das heißt gilt es zu $a, b \in K$ $a < b$ und $x, y \in X$ $x \neq y$ stets ein $f \in C(X, K)$ mit $f(x) < a$ und $b < f(y)$, so läßt sich die obige Frage positiv beantworten. Die entsprechende Beweisidee geht auf Kaplansky [12] zurück. In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, daß für alle nulldimensionalen Ketten, speziell auch für endliche Ketten, obige Aussage richtig bleibt. Für solche Ketten ist der Verband $C(X, K)$ jedoch nicht K -separierend. Weiter wird gezeigt, daß für alle Ketten K , die mehr als eine nichttriviale (das heißt mehrpunktige) Zusammenhangskomponente besitzen, nicht feste K -Homomorphismen von $C(X, K)$ in K für kompakte Räume X existieren. Ungelöst bleibt die Frage für zusammenhängende Ketten. Hier wird für einen kompakten Raum X eine zusammenhängende Kette K und ein K -Homomorphismus $\psi: C(X, K) \rightarrow K$ angegeben, der nicht fest in X ist. Unter Benutzung von Satz A und der Ergebnisse für den kompakten Fall, wird der folgende Satz bewiesen:

Satz B

Es seien K eine nulldimensionale Kette oder eine zusammenhängende Teilkette von $\mathbb{R}$ und X ein K -kompakter topologischer Raum. Dann ist jeder K -Homomorphismus $\psi: C(X, K) \rightarrow K$ fest in X .

Für beliebige Ketten K und K -reguläre Räume X wird die Umkehrung von Satz B bewiesen. Man erhält somit eine ver-

bandstheoretische Charakterisierung K -kompakter topologischer Räume.

O.4 Diskrete topologisch Räume

Beschränkt man sich auf diskrete topologische Räume, so erhält man

Satz C

Für beliebige Ketten K und diskrete topologische Räume X sind äquivalent:

- (a) X ist K -kompakt,
- (b) jeder K -Homomorphismus $\psi: K^X \rightarrow K$ ist eine Projektion.

Für abgeschlossene Teilketten K von $\mathbb{R}$, die $\mathbb{Z}$ enthalten wird gezeigt, daß eine Menge M genau dann nichtmeßbar ist, wenn jeder K -Homomorphismus von K^M in K eine Projektion ist.

O.5 Ring- und Verbandshomomorphismen

Die zweielementige Kette D und die Ketten $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ bzw. $\mathbb{R}$ der ganzen, rationalen bzw. der reellen Zahlen lassen sich zugleich als topologische Ringe auffassen. Parallel zur Theorie der Verbände $C(X, D)$, $C(X, \mathbb{Z})$, $C(X, \mathbb{Q})$ und $C(X, \mathbb{R})$ ergibt sich dann eine Theorie für die zugehörigen Funktorenringe. In einigen Arbeiten (vergl. [3], [15] und [17]) wird untersucht, wann für obige Ketten K jeder Ringhomomorphismus von $C(X, K)$ in K fest in X ist. In diesem Zusammenhang wird gezeigt, daß die Menge aller Ringhomomorphismen von $C(X, K)$ in K in den oben genannten Fällen gleich der Menge aller K -Homomorphismen ist.

Ungelöst ist das Problem, ob die Klasse aller nulldimensionalen reellkompakten Räume mit der Klasse aller $\mathbb{Z}$ -kompakten Räume zusammenfällt. Es wird eine rein algebraische Formulierung dieses Problems angegeben.

0.6 Dualität

Ist K eine nulldimensionale Kette oder eine zusammenhängende Teilkette von $\mathbb{R}$, so werden folgende Kategorien betrachtet: Die Kategorie $\mathcal{K}(K)$ aller K -kompakten Räume mit stetigen Abbildungen; die Kategorie K -Verb aller K -Verbände und K -Homomorphismen; $\mathcal{L}(K)$, die volle Bildkategorie von $\mathcal{K}(K)$ unter dem kontravarianten Morphismenfunktor $(\cdot, K) : \mathcal{K}(K) \longrightarrow \underline{K\text{-Verb}}$. Man erhält

Satz D

Für nulldimensionale Ketten oder zusammenhängende Teilketten von $\mathbb{R}$ ist die Kategorie $\mathcal{K}(K)$ aller K -kompakten topologischen Räume zur K -Verbandskategorie $\mathcal{L}(K)$ in natürlicher Weise dualäquivalent.

Betrachtet man die Ketten $K = D, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$, die zugleich eine mit der Topologie verträglichen Ringstruktur tragen, so kann man $\mathcal{L}(K)$ zugleich als Teilkategorie der Kategorie Ring aller kommutativen Ringe mit Einselement und Ringhomomorphismen, die Einselemente respektieren, auffassen. In diesem Fall ergibt sich eine Dualität zwischen den Kategorien $\mathcal{K}(K)$ und den entsprechenden Teilkategorien in Ring. Ursache für alle aufgeführten Dualitäten ist die Gleichheit der Morphismenmenge $((X, K)_{\mathcal{K}(K)}, K)_{\mathcal{L}(K)}$ und der Menge aller Ring- bzw. K -Homomorphismen von $(X, K)_{\mathcal{K}(K)}$ in K , die fest in X sind. Als Spezialfälle erhält man:

1. Die Dualität zwischen nulldimensionalen kompakten Räumen und Booleschen Algebren bzw. Booleschen Ringen.
2. Die Dualität zwischen reellkompakten Räumen und den zugehörigen Funktionenringen bzw. Funktionenverbänden.

Der erste Spezialfall wird in einer 1937 erschienenen Ar-

beit von M.H. Stone [22] behandelt (vgl. auch [7], [20]). Die zweite Dualität liefert den kategoriellen Hintergrund des Buches "Rings of continuous functions" von L. Gillman und M. Jerison [5]. In der angegebenen Literatur wird jedoch nicht die kategorielle Sprechweise herangezogen, die die Dinge etwas übersichtlicher gestaltet. Betrachtet man eine beliebige Kette K und Mengen I , die als diskrete Räume K -kompakt sind, so erhält man eine Dualität zwischen diesen Mengen und den zugehörigen Produkten K^I . Unter der Annahme, daß jede Menge nichtmeßbar ist gilt: In $\mathbf{R}$ -Verb ist die Kategorie aller Produkte $\mathbf{R}^I$ reflektiv. Die Konstruktion eines entsprechenden Beispiels in der Kategorie der Hausdorffräume ist sehr schwierig (vgl. [12]).

0.7 Die Kategorien $\mathcal{C}(K)$

Es werden für Ordinalketten D_α die Kategorien $\mathcal{C}(D_\alpha)$ untersucht. Hier erhält man das folgende erstaunliche Ergebnis

Satz E

Es seien D_α und D_β verschiedene Ordinalketten. Dann sind die Kategorien $\mathcal{C}(D_\alpha)$ und $\mathcal{C}(D_\beta)$ disjunkt, das heißt es gibt kein Objekt in $\mathcal{C}(D_\alpha)$, das zu irgend einem Objekt in $\mathcal{C}(D_\beta)$ verbandsisomorph ist.

Die Klasse aller Ordinalketten K , die die gleiche Kategorie $\mathcal{K}(K)$ erzeugen liefert somit eine Klasse zueinander äquivalenter jedoch disjunkter Verbandskategorien.

Der folgende Satz beschreibt die Dedekind-vollständigen Funktionenverbände

Satz F

K sei eine nulldimensionale Dedekind-vollständige Kette oder eine zusammenhängende Teilkette von $\mathbb{R}$ und X ein K -regulärer topologischer Raum. Dann sind äquivalent

- (a) X ist extrem unzusammenhängend,
- (b) $C(X, K)$ ist Dedekind-vollständig.

Objekte der Form $C(K^I, K)$ sind frei in den Kategorien $\mathcal{C}(K)$.

0.8 Anwendungen der Dualität

Für nulldimensionale Ketten oder zusammenhängende Teilketten von $\mathbb{R}$ sind zwei K -kompakte Räume genau dann homöomorph, wenn die zugehörigen Funktionenverbände K -isomorph sind. Für Ordinalketten wird gezeigt, daß die Begriffe "K-isomorph" und "Verbandsisomorph" zusammenfallen. Für die Kette $\mathbb{Z}$ erhält man einen in [17] bewiesenen Satz.

Ein entsprechendes Resultat erhielt Shirota für die Kette $\mathbb{R}$ (vgl. [18]). Ungelöst ist das Problem, für welche Ketten die beiden Isomorphiebegriffe zusammenfallen.

In den Kategorien $\mathcal{K}(D)$, $\mathcal{K}(I)$, $\mathcal{C}(D_n)$ und $\mathcal{C}(I)$ fallen die Begriffe Epimorphismus und surjektive Abbildung bzw. Monomorphismus und injektive Abbildung zusammen. Mit Hilfe eines Satzes von Gleason [6] wird gezeigt, daß in den Kategorien $\mathcal{C}(D_n)$ und $\mathcal{C}(I)$ die injektiven Objekte gerade die vollständigen Verbände sind.

Ich danke besonders Herrn Dr. Horst Herrlich, der mich in die in dieser Arbeit behandelten Gebiete einführte. Von ihm erhielt ich während zahlreicher Gespräche wichtige Anregungen.

Alle in dieser Arbeit auftretenden topologischen Räume seien T_2 -Räume. Die Menge aller stetigen Abbildungen eines Raumes X in einen Raum Y werde mit $C(X,Y)$ bezeichnet. $f|A$ sei die Einschränkung einer Abbildung $f \in C(X,Y)$ auf eine Teilmenge $A \subset X$.

Kapitel I: Kettenkompakte Räume

§ 1 E-reguläre und E-kompakte Räume

In diesem Paragraphen sollen Ergebnisse der Theorie der E-kompakten Räume, in welcher die E-regulären Räume eine wichtige Rolle spielen, zusammengestellt werden. Die Beweise der entsprechenden Sätze, auf die hier weitgehend verzichtet wird, findet man in den Arbeiten [9] und [10] .

1.1 Definition Sei E ein topologischer Raum. Ein Raum X heißt dann E-regulär, wenn X zu einem Unterraum des Produktraumes E^I für eine geeignete Indexmenge I homöomorph ist.

Wie man leicht sieht, ist die Eigenschaft eines Raumes, E-regulär zu sein, produkttreu (d.h. ist für jedes $i \in I$ X_i E-regulär, so ist auch das Produkt $\prod X_i$ E-regulär) und erblich (d.h. mit X ist auch jeder Unterraum von X E-regulär).

Bei vorgegebenem E werde mit $R(E)$ die Klasse aller E-regulären Räume bezeichnet. Die folgenden Beispiele zeigen, daß einfache Räume E wichtige Klassen $R(E)$ topologischer Räume erzeugen.

1.2 Beispiele

(a) Ist $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen, versehen mit der üblichen Topologie, so ist $R(\mathbb{R})$ die Klasse aller vollständig regulären Räume. Ebenso erzeugt das Einheitsintervall $[0,1]$ die Klasse aller vollständig regulären Räume.

Unter einem nulldimensionalen Raum verstehen wir einen Raum mit der Eigenschaft, daß jeder Punkt des Raumes eine Umgebungsbasis aus zugleich offenen und abgeschlossenen Mengen besitzt.

(b) Sei $D = \{0,1\}$ mit der diskreten Topologie versehen. Dann ist $R(D)$ die Klasse aller nulldimensionalen Räume.

(c) Sei F der Raum bestehend aus den Punkten $1,2,3$, wobei $\{1\}$ und F die einzige nichtleeren offenen Teilmengen von F sind. Dann ist $R(F)$ die Klasse aller topologischer Räume.

1.3 Definition Sei E ein topologischer Raum. Ein Raum X heißt E-kompakt, wenn X zu einem abgeschlossenen Unterraum des Produktraumes E^I für eine geeignete Indexmenge I homöomorph ist.

Ist E ein Raum, so sei mit $K(E)$ die Klasse aller E -kompakten Räume bezeichnet. $K(E)$ ist produkttreu und abgeschlossen erblich (d.h. mit X gehört auch jeder abgeschlossene Unterraum von X zu $K(E)$). Außerdem ergibt sich unmittelbar aus 1.1 und 1.3, daß jeder E -kompakte Raum E -regulär ist.

1.4 Satz E, X seien topologische Räume. Dann sind äquivalent:

- (a) X ist E -regulär,
- (b) ist A eine Teilmenge von X und x ein Element in X , welches nicht zur abgeschlossenen Hülle von A gehört, so gibt es einen E -regulären Raum Y und ein $f \in C(X, Y)$ mit der Eigenschaft, daß $f(x)$ nicht in der abgeschlossenen Hülle von $f(A)$ liegt.

1.5 Satz Seien X, Y, E topologische Räume, $f \in C(X, Y)$ und $f(X)$ eine dichte Teilmenge in Y . Dann sind äquivalent:

- (a) zu jedem $g \in C(X, E)$ existiert genau ein $\bar{g} \in C(Y, E)$, so daß $\bar{g}f = g$.
- (b) zu jedem E -kompakten Raum K und jedem $g \in C(X, K)$ existiert genau ein $\bar{g} \in C(Y, K)$, so daß $\bar{g}f = g$.

1.6 Satz Sei X ein E -regulärer Raum. Dann existiert ein E -kompakter Raum $\beta_E X$ und ein Homöomorphismus β_E von X auf eine dichte Teilmenge von $\beta_E X$, so daß folgende Bedingung erfüllt ist:

zu jedem E -kompakten Raum Y und jedem $g \in C(X, Y)$ existiert genau ein $\bar{g} \in C(\beta_E X, Y)$, so daß $\bar{g}|_{\beta_E} = g$.

Das Paar $(\beta_E, \beta_E X)$ ist durch obige Bedingung in dem Sinne eindeutig bestimmt, daß zu jedem weiteren Paar $(\gamma, \gamma X)$, welches obiger Bedingung genügt, ein Homöomorphismus h von $\beta_E X$ auf γX existiert, so daß $h \cdot \beta_E = \gamma$.

Beweis: Wegen 1.5 genügt es, $(\beta_E, \beta_E X)$ so zu konstruieren, daß zu jedem $g \in C(X, E)$ genau ein $\bar{g} \in C(\beta_E X, E)$ existiert mit $\bar{g}|_{\beta_E} = g$. Hierzu betrachte man die eindeutig bestimmte Abbildung f von X in $Y = E^{C(X, E)}$ mit $p_g f = g$ für alle $g \in C(X, E)$, wobei p_g die g -te Projektion von Y nach E ist. Setzt man $\beta_E X = \text{cl}_Y f(X)$ und $\beta_E = f|_X$, so sind, wie man leicht nachprüft, die erforderlichen Bedingungen erfüllt.

Eine unmittelbare Anwendung von 1.6 führt zu

1.7 Satz X, rX und E seien topologische Räume. Dann sind äquivalent:

- (a) X ist E -kompakt,
- (b) ist $r \in C(X, rX)$, $r(X)$ dicht in rX und existiert zu jedem E -kompakten Raum Y und $g \in C(X, Y)$ genau ein $\bar{g} \in C(rX, Y)$ mit $\bar{g}r = g$, so ist r ein Homöomorphismus.

1.8 Beispiele

- (a) Betrachtet man das Einheitsintervall $I = [0, 1]$, versehen mit der Relativtopologie bezüglich $\mathbb{R}$, so ist $K(I)$ die Klasse aller kompakten Räume und β_I die Stone-Cech Kompaktifizierung.

- (b) $K(\mathbb{R})$ ist die Klasse aller reellkompakten Räume und

$\beta_{\mathbb{R}}$ die Hewitt-Reellkompaktifizierung.

- (c) $K(D)$ ist die Klasse aller nulldimensionalen kompakten Räume und β_D eine Banaschewskische nulldimensionale Kompaktifizierung.

Wie die obigen Beispiele zeigen, erhält man mit $K(S)$ für gewisse Unterräume von $\mathbb{R}$ wichtige Klassen topologischer Räume. In diesem Zusammenhang ist von Interesse, wie die Klasse $K(\mathbb{Z})$ aller $\mathbb{Z}$ -kompakten Räume, wobei $\mathbb{Z}$ der Ring der ganzen Zahlen ist, aussieht. Eine Vermutung von Engelking-Mrowka [4], daß $K(\mathbb{Z})$ gleich der Klasse aller nulldimensionalen reellkompakten Räume ist, blieb bisher unbewiesen. Wir werden später eine rein algebraische Formulierung dieses Problems finden.

Der folgende Satz ist sehr nützlich, um gewisse Aussagen über kompakte Räume auf E-kompakte Räume zu übertragen.

- 1.9 Satz Seien E ein beliebiger Raum, X ein vollständig regulärer E-kompakter Raum und $S(E)$ ein kompakter Raum, in dem E eingebettet ist. Dann gibt es zu jedem x_0 in $\beta_I X \setminus \beta_I(X)$ ein $\bar{f} \in C(\beta_I X, S(E))$ mit $\bar{f}|_{\beta_I(X)} \subseteq E$ und $\bar{f}(x_0) \notin E$.

Seien E ein nulldimensionaler Raum, X ein E-kompakter Raum und $S(E)$ ein nulldimensionaler Raum, in dem E eingebettet ist. Dann gibt es zu jedem x_0 in $\beta_D X \setminus \beta_D(X)$ ein $\bar{f} \in C(\beta_D X, S(E))$ mit $\bar{f}|_{\beta_D(X)} \subseteq E$ und $\bar{f}(x_0) \notin E$.

Beweis: Seien $x_0 \in \beta_I X \setminus \beta_I(X)$, Y der von $\beta_I(X) \cup \{x_0\}$ erzeugte Unterraum von $\beta_I X$ und $i: Y \rightarrow \beta_I X$ die zugehörige Einbettung. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes $\beta \in C(X, Y)$ mit $i\beta = \beta_I$. Da $\beta(X)$ dicht in Y , ist $\beta(X)$ nicht homöomorph zu Y . Wegen der E-kompaktheit von X folgt mit 1.5 und 1.7 die Existenz eines $f \in C(X, E)$ so, daß es kein $\bar{f} \in C(Y, E)$ gibt, für welches $\bar{f}\beta = f$ gilt. Andererseits ist $S(E)$ kom-

pakt. Daher existiert zu $f \in C(X, E)$ ein $\tilde{f} \in C(\beta_I X, S(E))$ mit $\tilde{f}|_{\beta_I} = f$ und somit ein $\bar{f} \in C(Y, S(E))$ mit $\bar{f}|_{\beta_I} = f$. Es folgt $\bar{f}|_{\beta_I}(X) \subseteq E$ und $\bar{f}(x_0) \notin E$.

Ersetzt man im obigen Beweis I durch D, so erhält man die zweite Aussage.

§ 2 Ketten und K-Verbände

Die Beispiele unter 1.8 zeigen, daß, wenn man sich auf Ketten K , versehen mit den zugehörigen Ordnungstopologien, beschränkt, sich wichtige Klassen K -kompakter Räume ergeben. Deshalb werden im folgenden ausschließlich Klassen $K(E)$, wobei der zugrunde liegende Raum E eine Kette ist, betrachtet. Die Objekte dieser Klassen heißen Kettenkompakte Räume. Es ist nützlich, einige Eigenschaften von Ketten zusammenzustellen.

Unter einer Kette K sei eine Menge, auf der eine zweistellige Relation " $\leq$ " mit den Eigenschaften

- (1) für beliebige $a, b \in K$ gilt $a \leq b$ oder $b \leq a$,
- (2) aus $a \leq b$ und $b \leq a$ folgt $a = b$,
- (3) aus $a \leq b$ und $b \leq c$ folgt $a \leq c$

definiert ist, zu verstehen. Falls $a \leq b$ und $a \neq b$, schreibt man $a < b$. Ein Element s in K heißt obere (untere) Schranke einer Teilmenge A in K , wenn $a \leq s$ ($s \leq a$) für alle $a \in A$.

Eine Teilmenge von K , die mindestens eine obere und eine untere Schranke besitzt, nennt man beschränkt. $Ma(A)$

($Mi(A)$) sei die Menge aller oberen (unteren) Schranken von A . Gilt für eine obere (untere) Schranke s von A stets $s \leq t$ ($t \leq s$) für beliebige $t \in Ma(A)$ ($t \in Mi(A)$), so heißt s Supremum (Infimum) von A . Man schreibt $s = \sup(A)$ ($s = \inf(A)$).

Ist $\sup(A) \in A$ ($\inf(A) \in A$), so spricht man von einem Maximum (Minimum). Eine Teilmenge I in K heißt Intervall, wenn

mit $a < t < b$, $a, b \in I$ und $t \in K$ stets $t \in I$ folgt. Wichtige Inter-

valle sind die Teilmengen $[a, b] = \{x \in K \mid a \leq x \leq b\}$, $[a, +) = \{x \in K \mid a \leq x\}$, und $(+, a] = \{x \in K \mid x \leq a\}$. Nimmt man die Endpunkte aus den obigen Mengen heraus, so erhält man (a, b) , $(a, +)$ und $(+, a)$.

Eine Zerlegung von K in disjunkte Teilmengen U und O mit der Eigenschaft, daß aus $a \in U$, $b \in O$ stets $a < b$ folgt, heißt Dedekindscher Schnitt. Einen Dedekindschen Schnitt nennt man einen Sprung, falls U ein Maximum b und O ein Minimum a besitzen. Es heißt a dann unmittelbarer Nachfolger von b und b unmittelbarer Vorgänger von a . Existiert weder ein Minimum noch ein Maximum, so spricht man von einer Lücke. Eine Kette heißt Dedekind-vollständig, falls jede beschränkte Teilmenge in K ein Supremum und Infimum besitzt. K ist genau dann Dedekind-vollständig, wenn sie keine Lücken besitzt. Beschränkte Dedekind-vollständige Ketten nennt man vollständig.

Eine Abbildung f von einer Kette K in eine Kette L heißt monoton, wenn aus $a \leq b$ stets $f(a) \leq f(b)$ folgt. Sie heißt isoton, wenn aus $a < b$ stets $f(a) < f(b)$ folgt. Jede isotone Abbildung ist injektiv. Ist f isoton und bijektiv, so heißt f Isomorphismus. Die Ketten K und L nennt man dann zueinander isomorph.

- 2.1 Satz Jede Kette K läßt sich in eine vollständige Kette $S(K)$ einbetten, d.h. es gibt zu jeder Kette eine Isotonie i von K in eine vollständige Kette $S(K)$.

Die entsprechende Vervollständigung erhält man, indem man $S(K) = \{A \mid A \in \mathcal{B}(K) \quad A = \bigcap \{M_\alpha \mid A \subseteq M_\alpha\}\}$ und die durch $i(a) = \bigcap \{M_\alpha \mid a \in M_\alpha\}$ für alle $a \in K$ definierte Abbildung betrachtet.

Ist K eine Kette, so bilden die Intervalle $(+, a)$ und $(a, +)$ für beliebige a in K eine Subbasis einer Topologie auf K , die man als Ordnungstopologie bezeichnet. Sprechen wir im folgenden von K in der Eigenschaft als topologischer Raum, so sei stets diese Ordnungstopo-

gie gemeint. K ist dann ein Hausdorff-Raum. Der folgende Satz gibt eine topologische Kennzeichnung vollständiger Ketten an.

2.2 Satz K sei eine Kette. Dann sind äquivalent:

- (a) K ist vollständig,
- (b) K ist kompakt.

Somit ist für jede Kette K $S(K)$ ein kompakter Raum. Die Einbettung $i: K \rightarrow S(K)$ ist zugleich topologische Einbettung. Da außerdem $i(K)$ dicht in $S(K)$ liegt, hat man mit $S(K)$ eine Kompaktifizierung von K . Es folgt: jede Kette ist vollständig regulär.

Eine Kette heißt zusammenhängend, wenn sie als topologischer Raum zusammenhängend ist.

2.3 Satz Für eine Kette K sind äquivalent:

- (a) K ist zusammenhängend,
- (b) K ist Dedekind-vollständig und kein Element in K besitzt einen unmittelbaren Nachfolger.

Jede Teilmenge einer Kette K ist mit der in K definierten Ordnung wiederum eine Kette. Die Topologie dieser Kette stimmt im allgemeinen nicht mit der Relativtopologie überein. Bei Intervallen fallen jedoch beide Topologien zusammen. Somit ist in zusammenhängenden Ketten jedes abgeschlossene Intervall kompakt. Zusammenhängende, separable Intervalle der Form a, b sind stets homöomorph zum Einheitsintervall.

2.4 Beispiele

- (a) Die Normtopologie von $\mathbb{R}$ ist gleich der Intervalltopologie von $\mathbb{R}$. $S(\mathbb{R})$ ist die Zweipunkt-kompaktifizierung.
- (b) Die Ordnungstopologie von $\mathbb{Z}$ fällt mit der diskreten Topologie zusammen. $S(\mathbb{Z})$ ist die Zweipunkt-kompakti-

fizierung.

(c) $\mathbb{Q}$ versehen mit der Ordnungstopologie ist ein nulldimensionaler Raum und es gilt $S(\mathbb{Q})=S(\mathbb{R})$.

Allgemein nennt man eine Kette nulldimensional, wenn sie als topologischer Raum nulldimensional ist. Wie Beispiel 2.4 (c) zeigt, ist die Kompaktifizierung $S(K)$ einer nulldimensionalen Kette K nicht notwendig nulldimensional. Um eine nulldimensionale Kompaktifizierung zu erhalten, muß man die Konstruktion von $S(K)$ etwas modifizieren. Hierzu ordnet man jeder Lücke von K nicht wie bei der Dedekindschen Konstruktion genau ein Element, sondern ein Element und einen unmittelbaren Nachfolger zu. Eine Präzisierung dieses Gedankens erfolgt in

2.5 Satz Sei K eine nulldimensionale Kette. Dann gibt es eine nulldimensionale kompakte Kette $S_0(K)$ und eine Einbettung $i: K \rightarrow S_0(K)$, so daß $i(K)$ dicht in $S_0(K)$ liegt.

Beweis: 1. Konstruktion von $S_0(K)$: Sei L die Gesamtheit aller Elemente in $S(K)$, die eine Lücke erzeugen, und j eine bijektive Abbildung von L auf eine Menge H , die disjunkt zu $S(K)$ ist. Man setze $S_0(K) = S(K) \cup H$ und ergänze die auf $S(K)$ definierte Ordnung wie folgt zu einer Ordnung von $S_0(K)$:

$j(l) < a$, falls $a \in S(K)$, $l < a$ oder $a = j(t)$, $l < t$ und
 $a < j(l)$, falls $a \in S(K)$, $a \leq l$ oder $a = j(t)$, $t < l$.

2. $S_0(K)$ als Kompaktifizierung von K : Um zu zeigen, daß $S_0(K)$ kompakt ist, genügt es, die Vollständigkeit von $S_0(K)$ nachzuweisen. Sei A eine beliebige Teilmenge von $S_0(K)$ und $R = \{l \mid j(l) \in H \cap A\}$. Dann besitzt $B = (A \cap S(K)) \cup R$ als Teilmenge von $S(K)$ ein Supremum s in $S(K)$. Ist $s \in R$, so ist $j(s)$ Supremum (sogar Maximum) von A . Andernfalls gibt es zu jedem $l \in R$ ein $b \in B$ mit $l < b \leq s$, und da $j(l)$ unmittelbarer Nachfolger von l ist, haben wir $j(l) \leq s$. Somit ist s Supremum von A . Dual zum obigen ergibt sich, daß A ein Infimum besitzt.

Sei i die in 2.1 definierte Abbildung von K in $S(K)$ und $\hat{i}$ die Einbettung von $S(K)$ in $S_0(K)$. Dann ist $i_0 = \hat{i}i$ eine Isotonie. Da zu jedem offenen Intervall (a_0, b_0) in $S_0(K)$ und $x \in (a_0, b_0)$ ein $a \in i_0(K)$ mit $a_0 < a \leq x$ oder ein $b \in i_0(K)$ mit $x < b < b_0$ existiert, ist $i_0(K)$ dicht in $S_0(K)$. Weiter gilt $i_0(K) \cap (a, b) = \bigcup \{ i_0(K) \cap (\alpha, \beta) \mid a \leq \alpha < \beta \leq b, \alpha, \beta \in i_0(K) \}$ für beliebige $a, b \in S_0(K)$, $a < b$. Somit ist i_0 topologische Einbettung und $S_0(K)$ Kompaktifizierung.

3. Nulldimensionalität von $S_0(K)$: Sei (a, b) ein offenes Intervall in $S_0(K)$ und $x \in (a, b)$. Dann betrachten wir folgende Fälle:

(a) $(a, b) \subseteq i_0(K)$. Als Unterraum von $i_0(K)$ ist (a, b) null-dimensional. Da bei Intervallen Relativ- und Ordnungstopologie übereinstimmen, ist (a, b) als Kette null-dimensional. Es gibt außerdem eine in $S_0(K)$ abgeschlossene Umgebung A von x , die in (a, b) liegt. Sei nun O eine in (a, b) zugleich offene und abgeschlossene Umgebung von x , die in A liegt. Dann ist O eine in $S_0(K)$ zugleich offene und abgeschlossene Umgebung von x , die in (a, b) liegt.

(b) Es gelte $(a, x) \cap (S_0(K) \setminus i_0(K)) \neq \emptyset$ und $(x, b) \cap (S_0(K) \setminus i_0(K)) \neq \emptyset$. Nach Konstruktion von $S_0(K)$ gibt es dann ein Element α in $[a, x)$, welches einen unmittelbaren Nachfolger, und ein Element β in $(x, b]$, welches einen unmittelbaren Vorgänger besitzt. (α, β) ist dann eine offen-abgeschlossene Menge in $S_0(K)$, für die $x \in (\alpha, \beta) \subseteq (a, b)$ gilt.

(c) Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $(a, x) \subseteq i_0(K)$ und gebe es ein $\beta \in (x, b]$, welches einen unmittelbaren Vorgänger γ besitzt. Ist a unmittelbarer Vorgänger von x , so ist (a, β) ein offen-abgeschlossenes Intervall in $S_0(K)$ mit $x \in (a, \beta) \subseteq (a, b)$. Andernfalls gibt es ein $\gamma \in (a, x)$ und somit gemäß (a) eine in $S_0(K)$ offen-abgeschlossene Menge U , so daß $\gamma \in U \subseteq (a, x)$. $U \cup (\gamma, \beta) = U \cup [\gamma, \gamma]$ ist dann eine offen-abgeschlossenen Umgebung von x , die in (a, b) liegt.

Eine Menge L , versehen mit assoziativen und kommutativen inneren Kompositionen " $\wedge$ " und " $\vee$ ", heißt Verband, wenn für alle $a, b \in L$ $a \wedge (a \vee b) = a$ und $a \vee (a \wedge b) = a$ gilt. Vermöge $a \wedge b =$

$\text{Min}\{a,b\}$ und $\text{avb}=\text{Max}\{a,b\}$ wird jede Kette zu einem Verband. Die Menge aller stetigen Abbildungen eines topologischen Raumes X in eine Kette K wird zu einem Verband, indem man $(f \wedge g)(x) = f(x) \wedge g(x)$ und $(f \vee g)(x) = f(x) \vee g(x)$ für alle $x \in X$ und $f, g \in C(X, K)$ setzt. Eine Abbildung ψ von einem Verband L in einen Verband V heißt Verbandshomomorphismus, wenn $\psi(a \wedge b) = \psi(a) \wedge \psi(b)$ und $\psi(\text{avb}) = \psi(a) \vee \psi(b)$ für alle $a, b \in L$. Ist ψ bijektiv, so spricht man von einem Verbandsisomorphismus und nennt die Verbände L und V isomorph. Die zu $a \in K$ gehörige konstante Abbildung in $C(X, K)$ werde mit $\underline{a}$ bezeichnet. Die Menge aller konstanten Abbildungen in $C(X, K)$ bilden einen Teilverband in $C(X, K)$. Dieser Teilverband ist isomorphes Bild von K unter der Abbildung $i_X: K \rightarrow C(X, K)$ mit $i_X(a) = \underline{a}$ für alle $a \in K$. Dies führt zum Begriff des K -Verbandes.

2.6 Definition K sei eine Kette, L ein Verband und $i_L: K \rightarrow L$ ein Isomorphismus von K in L . Dann heißt (i_L, L) K -Verband. Sind (i_L, L) und (i_V, V) K -Verbände, so heißt ein Verbandshomomorphismus $\psi: L \rightarrow V$ K -Homomorphismus, wenn $\psi i_L = i_V$.

Insbesondere ist die Kette K selbst als K -Verband $(1_K, K)$ anzusehen. Wie man leicht nachprüft, bildet die Klasse aller K -Verbände und K -Homomorphismen eine Kategorie.

Ist K eine nulldimensionale Kette und X ein K -regulärer Raum, so läßt sich dem K -Verband $C(X, K)$ wie folgt ein zu $C(X, K)$ K -isomorpher Verband zuordnen:

$S_0(K)$ sei eine nulldimensionale Kompaktifizierung von K und $\beta_D X$ die D -Kompaktifizierung von X . Dann läßt sich $g \in C(X, K)$ als stetige Abbildung von X in $S_0(K)$ auffassen und es existiert genau ein $\bar{g} \in C(\beta_D X, S_0(K))$, so daß $\bar{g} \beta_D = g$. i sei der durch $i(g) = \bar{g}$ für alle $g \in C(X, K)$ definierte K -Isomorphismus von $C(X, K)$ in $C(\beta_D X, S_0(K))$ und $C_\beta(\beta_D X, S_0(K))$ das Bild von $C(X, K)$ unter i .

Entsprechend ist für vollständig reguläre Räume X

$C_\beta(\beta_I X, S(K)) = \{\bar{g} \mid \bar{g} \beta_I = g \text{ } g \in C(X, K)\} \subseteq C(\beta_I X, S(K))$ ein zu $C(X, K)$

isomorpher Verband.

§ 3 K-Homomorphismen von $C(X, K)$ in K für kompakte Räume X

Ist X ein beliebiger topologischer Raum und K eine Kette, so sei mit $\text{Hom}_K(C(X, K), K)$ die Menge aller K -Homomorphismen von $C(X, K)$ in K bezeichnet. In dieser Menge sind gewisse Elemente ausgezeichnet.

- 3.1 Definition Ein K -Homomorphismus ψ von $C(X, K)$ in K heißt fest in X , wenn ein $x \in X$ existiert, so daß $\psi(f) = f(x)$ für alle $f \in C(X, K)$ gilt.

Hauptgegenstand der Untersuchungen des I. Kapitels ist folgendes Problem:

- (+) Unter welchen Bedingungen an X und K sind alle K -Homomorphismen von $C(X, K)$ in K fest in X ?

- 3.2 Definition Sei K eine Kette. Ein topologischer Raum X heißt K -Hausdorffsch, wenn zu $x, y \in X$ $x \neq y$ ein $f \in C(X, K)$ existiert, so daß $f(x) \neq f(y)$.

- 3.3 Satz Sei K eine Kette. Zu jedem Raum X gibt es einen K -Hausdorffraum Y , so daß die Verbände $C(X, K)$ und $C(Y, K)$ K -isomorph sind. Ist X kompakt, so auch Y . Sind alle K -Homomorphismen von $C(Y, K)$ in K fest in Y , so sind auch alle K -Homomorphismen von $C(X, K)$ in K fest in X .

Beweis: Durch $(x, y) \in \Pi$ dann und nur dann, wenn $f(x) = f(y)$ für alle $f \in C(X, K)$ wird auf X eine Äquivalenzrelation definiert. Sei Y der Quotientenraum X/Π und π die natürliche Abbildung von X auf Y . Dann hat man einen K -Homomorphismus i von $C(Y, K)$ auf $C(X, K)$, gegeben durch $i(f) = f\pi$ für alle $f \in C(Y, K)$.

Ist X kompakt, so ist Y als Bild von X unter der stetigen Abbildung π kompakt.

Sei jeder K -Homomorphismus von $C(Y, K)$ in K fest in Y und $\psi: C(X, K) \rightarrow K$ ein K -Homomorphismus. Dann gibt es ein $[y] \in Y$, so daß $\psi(f) = f([y])$ für alle $f \in C(Y, K)$. Es folgt $\psi(f) = \psi(i^{-1}(f)) = i^{-1}(f)([y]) = f(x)$ für jedes $x \in [y]$ und alle $f \in C(X, K)$. Somit ist ψ fest in jedem $x \in [y]$.

3.4 Folgerung Ist K eine Kette und X ein K -Hausdorffraum, so ist ein K -Homomorphismus von $C(X, K)$ in K fest in höchstens einen Punkt in X .

Wegen Satz 3.3 kann man sich bei der Untersuchung der Frage, ob ein K -Homomorphismus von $C(X, K)$ in K fest ist, auf K -Hausdorffräume X beschränken.

Es ist schwierig, das Problem (+) für beliebige Ketten K und topologische Räume X zu lösen. Deshalb werde die Problemstellung dahin gehend spezialisiert, daß untersucht wird, welche Ketten die Eigenschaft besitzen, daß für alle kompakten Räume X jeder K -Homomorphismus von $C(X, K)$ in K fest in X ist. In diesem Zusammenhang ist der folgende Begriff recht nützlich.

3.5 Definition Sei K eine Kette. Ein topologischer Raum X heißt stark K -Hausdorffsch, wenn zu $a, b \in K^O$ (K^O =Menge der Elemente von K , die verschieden von den Randpunkten sind) und $x, y \in X$ ein $f \in C(X, K)$ existiert, so daß $f(x) < a$ und $b < f(y)$.

3.6 Satz K sei eine Kette, X ein K -Hausdorffraum und K stark K -Hausdorffsch. Dann ist X stark K -Hausdorffsch.

Der obige Satz ist eine unmittelbare Folgerung aus 3.2 und 3.5 .

3.7 Satz Sei K eine stark K -Hausdorffsche Kette und X ein kompakter Raum. Dann ist jeder K -Homomorphismus von $C(X, K)$ in K fest in X .

Bevor Satz 3.7 bewiesen wird, sollen einige Lemmata bereitgestellt werden.

3.8 Lemma X sei ein kompakter topologischer Raum und $D=\{0,1\}$ eine zweielementige Kette. Dann ist jeder D-Homomorphismus von $C(X,D)$ in D fest in X.

Beweis: Sei $\psi: C(X,D) \rightarrow D$ ein D-Homomorphismus. Dann betrachte man die Mengensysteme $\mathcal{F}_0 = \{f^{-1}(\{0\}) \mid f \in C(X,D) \psi(f)=0\}$ und $\mathcal{F}_1 = \{f^{-1}(\{1\}) \mid f \in C(X,D) \psi(f)=1\}$ bestehend aus zugleich offenen und abgeschlossenen Mengen. Zunächst wird gezeigt, daß $\mathcal{F}_0$ und $\mathcal{F}_1$ Filterbasen sind.

Da $\overline{0}^{-1}(\{0\})=X$ und $\psi(\overline{0})=0$, ist $\mathcal{F}_0 \neq \emptyset$. Betrachtet man $f^{-1}(\{0\})$, $g^{-1}(\{0\}) \in \mathcal{F}_0$, so folgt mit $\psi(f)=\psi(g)=0$ $\psi(f \vee g) = \psi(f) \vee \psi(g) = 0$ und somit $(f \vee g)^{-1}(\{0\}) = f^{-1}(\{0\}) \cap g^{-1}(\{0\}) \neq \emptyset$, denn sonst hätte man $f \vee g = \overline{1}$ und, da ψ D-Homomorphismus ist $\psi(f \vee g) = (\overline{1}) = 1$. Dual ergibt sich die Filterbasiseigenschaft von $\mathcal{F}_1$.

Für beliebige $A \in \mathcal{F}_0$ und $B \in \mathcal{F}_1$ gilt weiter $A \cap B \neq \emptyset$, denn im Falle $A \cap B = \emptyset$ betrachte man $h \in C(X,D)$ mit

$$h(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in A \\ 0, & \text{falls } x \notin A \end{cases}.$$

Aus $\psi(h)=1$ folgt $h^{-1}(\{1\})=A \in \mathcal{F}_1$. Das widerspricht wegen $B \in \mathcal{F}_1$ und $A \cap B = \emptyset$ der Filterbasiseigenschaft von $\mathcal{F}_1$. Entsprechend führt $\psi(h)=0$ zu einem Widerspruch.

Somit ist $\mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1$ ein System abgeschlossener Mengen in X, welches die endliche Durchschnittseigenschaft besitzt. Auf Grund der Kompaktheit von X existiert ein $p \in \bigcap (\mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1)$. Mit $\psi(f)=1$ und $p \in f^{-1}(\{1\})$ folgt $f(p)=1$ und entsprechend impliziert $\psi(f)=0$ $f(p)=0$. Man hat $\psi(f)=f(p)$ für alle $f \in C(X,D)$, das heißt, ψ ist fest in p.

3.9 Lemma Seien K eine Kette, $k \in K$ und X ein kompakter topologischer Raum. Dann existiert ein $p \in X$, so daß für $f, g \in C(X,K)$ mit $f(p) < g(p)$, $\psi(g) < k$ stets $\psi(f) < k$ folgt.

Beweis: Angenommen es gibt zu jedem $x \in X$ $f_x, g_x \in C(X,K)$ mit $f_x(x) < g_x(x)$, $\psi(g_x) < k$ und $k \leq \psi(f)$. Es gibt dann of-

fene Umgebungen $O_1, O_2, \dots, O_n$ von $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$, die X überdecken wobei $f_{x_i} \mid O_i < g_{x_i} \mid O_i$ für $i=1, 2, \dots, n$. Sei $f = \bigwedge f_{x_i}$ und $g = \bigvee g_{x_i}$. Dann gilt $f < g$ und somit $\psi(f) \leq \psi(g)$. Andererseits hat man $\psi(g) = \psi(\bigvee g_{x_i}) = \bigvee \psi(g_{x_i}) < k \leq \bigwedge \psi(f_{x_i}) = \psi(\bigwedge f_{x_i}) = \psi(f)$, ein Widerspruch.

3.10 Lemma Sei K eine Kette und X ein topologischer Raum. Gibt es ein $p \in X$, so daß für $f, g \in C(X, K)$ aus $f(p) < g(p)$ stets $\psi(f) \leq \psi(g)$ folgt, so ist ψ fest in p .

Beweis: Man unterscheidet folgende Fälle:

1. $f(p)$ besitze weder einen unmittelbaren Nachfolger noch einen unmittelbaren Vorgänger. Angenommen $f(p) < \psi(f)$. Dann gibt es ein $l \in K$ mit $f(p) < l < \psi(f)$. Es folgt wegen $f(p) < \underline{l}(p)$ $\psi(f) \leq \psi(\underline{l}) = l < \psi(f)$. Das ist ein Widerspruch. Entsprechend führt die Annahme $\psi(f) < f(p)$ zu einem Widerspruch und es bleibt $\psi(f) = f(p)$.
2. $a = f(p)$ sei unmittelbarer Vorgänger von $b = \psi(f)$. Dann gibt es ein $q \in X$ mit $b \leq f(q)$ und die Mengen $U = \{x \in X \mid f(x) \leq a\}$, $O = \{x \in X \mid b \leq f(x)\}$ bilden eine disjunkte offene Überdeckung von X . Somit wird durch

$$g(x) = \begin{cases} b, & \text{falls } x \in U \\ a, & \text{falls } x \in O \end{cases}$$

eine stetige Abbildung von X in K definiert. Ist $\psi(g) \leq a$, so folgt mit $f(p) < g(p)$ $\psi(f) \leq a$, ein Widerspruch. Im Falle $b \leq \psi(g)$ hat man mit $\psi(f) = b$ $\psi(f \wedge g) = b$. Andererseits ist $f \wedge g \leq a$ und somit $\psi(f \wedge g) \leq a$.

3. Dual zu 2. führt die Annahme, daß $\psi(f)$ unmittelbarer Vorgänger von $f(p)$ ist zu einem Widerspruch.

Nun zum Beweis von Satz 3.7 : Wegen 3.3 und 3.6 kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß X stark K -Hausdorffsch ist. Es werden dann getrennt folgende Fälle betrachtet:

1. K besitze kein kleinstes Element mit unmittelbarem Nachfolger und kein größtes Element mit unmittelbarem Vorgänger. Nach Lemma 3.9 gibt es zu $k_1, k_2 \in K^O$

$k_1 < k_2$ stets $p_1, p_2 \in X$, so daß für $f, g \in C(X, K)$ mit $f(p_1) < g(p_1)$, $\psi(g) <_{k_1} \psi(f) <_{k_1}$ ($i=1,2$) folgt. Es ist weiter $p_1 = p_2$. Denn wäre $p_1 \neq p_2$, so gäbe es ein $h \in C(X, K)$ und ein $l \in K$ mit $h(p_1) < l < k_1$ und $k_2 < h(p_2)$. Aus $\psi(l) <_{k_1}$ und $h(p_1) < l(p_1) = l$ folgt $\psi(h) <_{k_1} k_2$ und mit $k_2 = \underline{k}_2(p_2) < h(p_2)$ ergibt sich $k_2 = \psi(\underline{k}_2) < k_2$, ein Widerspruch.

Es gibt daher ein $p \in X$, so daß für beliebige $f, g \in C(X, K)$ und $k \in K^0$ aus $f(p) < g(p)$, $\psi(g) < k$ stets $\psi(f) < k$ folgt. Diese Aussage gilt trivialerweise auch, wenn k kleinstes Element in K ist. Ist k größtes Element in K , so folgt mit $f(p) < g(p)$, $\psi(g) < k$ $\psi(g) < l < k$ für ein $l \in K^0$ und somit $\psi(f) < l < k$. Für alle $k \in K$ und $f, g \in C(X, K)$ folgt daher mit $f(p) < g(p)$, $\psi(g) < k$ stets $\psi(f) < k$. Da $f(p) < g(p)$ und $\psi(g) < \psi(f) = k$ zu $\psi(f) < k = \psi(f)$, einem Widerspruch, führt, erfüllt $p \in X$ die Voraussetzungen von Lemma 3.10, das heißt ψ ist fest in p .

2. K besitze ein kleinstes Element mit unmittelbarem Nachfolger oder ein größtes Element mit einem unmittelbarem Vorgänger. Da der Fall einer zweielementigen Kette bereits in Lemma 3.8 behandelt wurde, kann man annehmen, daß K mindestens drei Elemente besitzt. Es genügt zu zeigen, daß ein $p \in X$ existiert, so daß für alle $k \in K$ aus $f, g \in C(X, K)$, $f(p) < g(p)$, $\psi(g) < k$ stets $\psi(f) < k$ folgt. Hieraus ergibt sich in 1. die Behauptung.

a) K bestehe aus genau drei Elementen $c < a < b$. Nach Lemma 3.9 existiert ein $p \in X$, so daß mit $f, g \in C(X, K)$, $f(p) < g(p)$, $\psi(g) < a$ stets $\psi(f) < a$ folgt. Angenommen es gebe ein $f \in C(X, K)$ mit $\psi(f) = b$ und $f(p) < b$. Dann gilt $f(x) = b$ für mindestens ein $x \in X$, und die nichtleeren offenen Mengen $U = \{x \in X \mid f(x) < a\}$ und $O = \{x \in X \mid f(x) = b\}$ bilden eine disjunkte Überdeckung von X .

Durch
$$g(x) = \begin{cases} c, & \text{falls } x \in O \\ b, & \text{falls } x \in U \end{cases} \quad \text{und} \quad h(x) = \begin{cases} b, & \text{falls } x \in O \\ c, & \text{falls } x \in U \end{cases}$$

werden stetige Abbildungen von X in K definiert. Da $\psi(f) = b$ und $f(p) < g(p)$, hat man $a \leq \psi(g)$. Ist $\psi(g) = a$, so ergibt sich mit $\psi(g) \wedge \psi(h) = \psi(g \wedge h) = \psi(\underline{c}) = c$ $\psi(h) = c$ und somit $\psi(g \vee h) = \psi(g) \vee \psi(h) = a$. Das ist ein Widerspruch zu $\psi(g \vee h) = \psi(\underline{b}) = b$. Mit $\psi(f) = b$, $\psi(g) = b$ folgt dann $\psi(f \wedge g) = \psi(f) \wedge \psi(g) = b$. Andererseits hat man $g \wedge f \leq a$ und somit $\psi(f \wedge g) \leq \psi(a) = a$, was nicht möglich ist. Somit folgt für $f, g \in C(X, K)$ aus $\psi(g) < b$, $f(p) < g(p)$ stets $\psi(f) < b$.

b) K besitze mindestens vier Elemente. Wie in 1. kann man ein $p \in X$ so finden, daß für alle $k \in K$, die verschieden vom größten und kleinsten Element und vom unmittelbaren Nachfolger des kleinsten Elements sind, mit $f, g \in C(X, K)$, $f(p) < g(p)$ und $\psi(g) < k$ stets $\psi(f) < k$ folgt. Sei a unmittelbarer Vorgänger des größten Elements b in K und $c \in K$ mit $c < a$. Dann führt die Annahme, daß ein $f \in C(X, K)$ mit $\psi(f) = b$ und $f(p) < b$ existiert wie in a) zu einem Widerspruch.

Ist b' kleinstes Element von K , welches einen unmittelbaren Nachfolger a' besitzt, so führt $f(p) < g(p)$ und $\psi(g) < a'$, das heißt $\psi(g) = b'$, schon zu einem Widerspruch. Dann ist $\psi(g) = b'$, so gibt es ein $x \in X$ mit $g(x) = b'$ und die Mengen $U = \{x \in X \mid g(x) = b'\}$, $O = \{x \in X \mid a' \leq g(x)\}$ bilden eine disjunkte offene Überdeckung von X . Man betrachtet wieder $h, k \in C(X, K)$ definiert durch

$$h(x) = \begin{cases} b', & \text{falls } x \in O \\ c', & \text{falls } x \in U \end{cases} \quad \text{und} \quad k(x) = \begin{cases} c', & \text{falls } x \in O \\ b', & \text{falls } x \in U \end{cases}$$

wobei $c' \in K$ nicht größtes Element mit $a' < c'$. Wegen $f(p) < g(p)$ ist $p \in O$ und somit $h(p) < g(p)$. Mit $\psi(g) < c'$ folgt $\psi(h) < c'$, und, da $h \wedge k = \underline{b'}$, $h \vee k = \underline{c'}$, das heißt $\psi(h) \wedge \psi(k) = b'$, $\psi(h) \vee \psi(k) = c'$, folgt $\psi(h) = b'$ und $\psi(k) = c'$. Es ist $\psi(g) = \psi(h) = b'$ und somit $\psi(g \vee h) = \psi(g) \vee \psi(h) = b'$. Dies widerspricht $a' \leq g \vee h$. Somit folgt für alle $k \in K$, $f, g \in C(X, K)$ mit $f(p) < g(p)$ und $\psi(g) < k$ stets $\psi(f) < k$.

Da jede nulldimensionale Kette K stark K -Hausdorffsch ist, hat man:

3.11 Satz Sei K eine nulldimensionale Kette und X ein kompakter topologischer Raum. Dann ist jeder K -Homomorphismus von $C(X, K)$ in K fest in X .

Die folgenden Betrachtungen sind für spätere Beweise von großer Bedeutung.

Mit einer nulldimensionalen Kette K und einem K -regulären Raum X war $C_\beta(\beta_D X, S_O(K))$ ein zu $C(X, K)$ K -isomorpher Teilverband von $C(\beta_D X, S_O(K))$. Da $\beta_D X$ nulldimensional ist, gibt es zu $x, y \in \beta_D X$ mit $x \neq y$ und $a, b \in K^O$ stets ein $f \in C(\beta_D X, K)$ und somit ein $f \in C_\beta(\beta_D X, S_O(K))$ mit $f(x) < a$ und $b < f(y)$.

3.12 Satz Es sei K eine nulldimensionale Kette und X ein K -regulärer Raum. Dann ist jeder K -Homomorphismus ψ von $C_\beta(\beta_D X, S_0(K))$ in K fest in $\beta_D X$.

Der Beweis des obigen Satzes erfolgt, indem wir die Beweis-idee von 3.7 heranziehen, und dort nachprüfen, ob alle Aussagen für den Fall, daß X durch βX und der K -Homomorphismus $\psi: C(X, K) \rightarrow K$ durch einen K -Homomorphismus von $C_\beta(\beta_D X, S_0(K))$ in K ersetzt wird, richtig bleiben.

Völlig analog zu 3.9 erhalten wir

3.9' Lemma Zu jedem $k \in K$ existiert ein $p \in \beta_D X$, so daß für $f, g \in C_\beta(\beta_D X, S_0(K))$ mit $f(p) < g(p)$, $\psi(g) < k$ stets $\psi(f) < k$ folgt.

Um Lemma 3.10 zu übertragen, hat man etwas behutsamer vorzugehen.

3.10' Lemma Gibt es ein $p \in \beta_D X$, so daß für $f, g \in C_\beta(\beta_D X, S_0(K))$ aus $f(p) < g(p)$ stets $\psi(f) \leq \psi(g)$ folgt, so ist ψ fest in p .

Beweis: Man unterscheidet folgende Fälle:

1. $f(p)$ besitzt weder einen unmittelbaren Nachfolger noch einen unmittelbaren Vorgänger. Angenommen $f(p) < \psi(f)$. Dann gibt es nach Konstruktion von $S_0(K)$ ein $l \in K$ mit $f(p) < l < \psi(f)$. Somit ist $\underline{l} \in C_\beta(\beta_D X, S_0(K))$. Man hat $f(p) < \underline{l}(p)$ und somit nach Voraussetzung $\psi(f) \leq \psi(\underline{l}) = l < \psi(f)$, ein Widerspruch. Entsprechend führt $\psi(f) < f(p)$ zu einem Widerspruch.

2. $a = f(p)$ sei unmittelbarer Vorgänger von $b = \psi(f) \in K$. Da die Elemente in $S_0(K)$ keine zu K gehörigen unmittelbare Nachfolger besitzen, liegt auch a in K . Die Mengen $U = \{x \in \beta_D X \mid f(x) \leq a\}$ und $O = \{x \in \beta_D X \mid b \leq f(x)\}$ sind nicht leer und bilden eine disjunkte offene Überdeckung von $\beta_D X$. Durch

$$g(x) = \begin{cases} b, & \text{falls } x \in U \\ a, & \text{falls } x \in O \end{cases}$$

wird ein $g \in C_\beta(\beta_D X, S_0(K))$ definiert. Ist $\psi(g) \leq a$, so folgt mit $f(p) < g(p)$ $\psi(f) \leq \psi(g) \leq a$, ein Widerspruch. Im Falle $b < \psi(g)$ hat man wegen $\psi(f) = b$ $\psi(f \wedge g) = b$. Andererseits ist $f \wedge g \leq a$ und somit $\psi(f \wedge g) \leq \psi(a) = a$.

3. Dual zu 2. führt die Annahme, daß $\psi(f)$ einen unmittelbaren Vorgänger $f(p)$ besitzt zu einem Widerspruch.

Nun zum Beweis des Satzes 3.12:

Besitzt K endlich viele Elemente, so hat man $S_0(K)=K$. Somit folgt $C_\beta(\beta_D X, S_0(K))=C(\beta_D X, K)$. Nach 3.7 ist dann jeder K -Homomorphismus $\psi: C_\beta(\beta_D X, K) \rightarrow K$ fest in $\beta_D X$. Im Falle einer unendlichen Kette K unterscheidet man wiederum folgende Fälle:

1. K besitze kein kleinstes Element mit unmittelbarem Nachfolger und kein größtes Element mit unmittelbarem Vorgänger. Indem man X durch $\beta_D X$ und $C(X, K)$ durch $C_\beta(\beta_D X, S_0(K))$ ersetzt, ergibt sich unter Anwendung von 3.9' und 3.10' wörtlich wie in 3.7.1., daß ψ fest in einem Punkte $p \in \beta_D X$ ist.

2. K besitze ein kleinstes Element mit einem unmittelbarem Nachfolger oder ein größtes Element mit einem unmittelbarem Vorgänger. Wie in 3.7.1. kann man ein $p \in X$ so finden, daß für alle $k \in K$, die verschieden vom größten und kleinsten Element und vom unmittelbarem Nachfolger des kleinsten Elements sind, mit $f, g \in C_\beta(\beta_D X, S_0(K))$, $f(p) < g(p)$ und $\psi(g) < k$ stets $\psi(f) < k$ folgt. Sei a unmittelbarer Vorgänger eines größten Elements b in K . Angenommen es gebe ein $f \in C_\beta(\beta_D X, S_0(K))$ mit $\psi(f) = b$ und $f(p) < b$. Dann ist $f(x) = b$ für mindestens ein $x \in X$, und die nicht leeren offenen Mengen $U = \{x \in \beta_D X \mid f(x) \leq a\}$ und $O = \{x \in \beta_D X \mid f(x) = b\}$ bilden eine disjunkte Überdeckung von $\beta_D X$. Es seien $c \in K$ mit $c < a$ und

$$g(x) = \begin{cases} c, & \text{falls } x \in O \\ b, & \text{falls } x \in U \end{cases} \quad h(x) = \begin{cases} b, & \text{falls } x \in O \\ c, & \text{falls } x \in U \end{cases}.$$

Dann gilt $g, h \in C_\beta(\beta_D X, S_0(K))$, und wie in 3.7.2 ergibt sich dann ein Widerspruch. Somit folgt für $f, g \in C_\beta(\beta_D X, S_0(K))$ mit $f(p) < g(p)$, $\psi(g) < b$ stets $\psi(f) < b$.

Ist b kleinstes Element in K , welches einen unmittelbaren Nachfolger a' besitzt, so führt $f(p) < g(p)$ und $\psi(g) < a'$ ebenfalls wie in 3.7.2. zu einem Widerspruch.

Für alle $k \in K$ und $f, g \in C_\beta(\beta_D X, S_0(K))$ folgt daher mit $f(p) < g(p)$, $\psi(g) < k$ stets $\psi(f) < k$, und damit ist ψ fest in $\beta_D X$.

Entsprechend war $C_\beta(\beta_I X, S(K))$ für beliebige Ketten K und vollständig reguläre Räume X ein zu $C(X, K)$ K -isomorpher Teilverband.

Man erhält:

- 3.13 Satz K sei eine beliebige Kette und X ein vollständig regulärer Raum mit der Eigenschaft, daß zu $x, y \in \beta_I X$ $x \neq y$ und $a, b \in K^0$ ein $f \in C_\beta(\beta_I X, S(K))$ existiert mit $f(x) < a$ und $b < f(y)$. Dann ist jeder K -Homomorphismus von $C_\beta(\beta_I X, S(K))$ in K fest in $\beta_I X$.

Ist K eine zusammenhängende Teilkette von $\mathbb{R}$, so erfüllt jeder vollständig reguläre Raum die Voraussetzungen des obigen Satzes. Somit ergibt sich der

- 3.14 Satz K sei eine zusammenhängende Teilkette von $\mathbb{R}$ und X ein vollständig regulärer Raum. Dann ist jeder K -Homomorphismus von $C_\beta(\beta_I X, S(K))$ in K fest in $\beta_I X$.

Es gibt kompakte topologische Räume X und Ketten K mit der Eigenschaft, daß nicht jeder K -Homomorphismus von $C(X, K)$ in K fest in X ist. Man kann sogar allgemein folgendes aussagen:

- 3.15 Satz K sei eine Kette, die mindestens zwei nichttriviale (daß heißt nicht einelementige) Zusammenhangskomponenten besitzt. Dann gibt es einen kompakten Raum X und einen K -Homomorphismus von $C(X, K)$ in K , der nicht fest in X ist.

Beweis: Seien $I_1, I_2 \subset K$ nichttriviale Zusammenhangskomponenten und es gelte ohne Beschränkung der Allgemeinheit $x < y$ für alle $x \in I_1$ und $y \in I_2$. Dann gibt es abgeschlossene Intervalle $[a, b] \subset I_1$ und $[c, d] \subset I_2$. Sei X die

Kette, die man erhält, indem man $[a,b]$ und $[c,d]$ unter Identifizierung von b und c aneinandersetzt. Als zusammenhängendes abgeschlossenes Intervall ist X kompakt. Seien $A = I_1 \cup (+, a]$ und $B = K \setminus A$. Da das Bild einer zusammenhängenden Menge unter einer stetigen Abbildung wiederum zusammenhängend ist, bilden $C(X,A)$ und $C(X,B)$ eine Zerlegung von $C(X,K)$ in disjunkte Teilverbände, wobei mit $f \in C(X,A)$ und $g \in C(X,B)$ stets $f < g$ folgt. Ausserdem enthalten nach Konstruktion von X sowohl $C(X,A)$ als auch $C(X,B)$ nichtkonstante Abbildungen. Für $z_1 \in (a,b)$ und $z_2 \in (b,d)$ ergibt

$$\psi(f) = \begin{cases} f(z_1) & \text{falls } f \in C(X,A) \\ f(z_2) & \text{falls } f \in C(X,B) \end{cases} \text{ einen}$$

K -Homomorphismus, der nicht fest in X ist.

- 3.16 Anmerkung Als K -regulärer, kompakter Raum ist X K -kompakt. Somit gibt es zu jeder Kette K , die mindestens zwei nichttriviale Zusammenhangskomponenten besitzt, einen K -kompakten Raum X und einen K -Homomorphismus von $C(X,K)$ in K , der nicht fest in X ist.

Auf Grund 3.15 bleibt lediglich noch der Fall zu untersuchen, in dem K genau eine nichttriviale Zusammenhangskomponente besitzt. Ziel der folgenden Betrachtungen ist es, das gestellte Problem auf zusammenhängende Ketten zu reduzieren.

- 3.17 Lemma Sei K eine Kette, die genau eine nichttriviale Zusammenhangskomponente I besitzt. Dann gibt es zu jedem $x \in K \setminus I$ eine offen-abgeschlossene Menge O mit $x \in O \subset K \setminus I$.

Beweis: Als offene Menge enthält $K \setminus I$ ein Intervall der Form (a,b) mit $x \in (a,b)$. Es genügt zu zeigen, daß die Intervalle $[a,x]$ und $[x,b]$ Sprünge enthalten. Ist nämlich c unmittelbarer Vorgänger eines Elementes in

$(a, x]$ und d unmittelbarer Nachfolger eines Elementes in $[x, b)$, so hat das Intervall (c, d) die gewünschten Eigenschaften.

Man betrachte das Intervall $[a, x]$ und nehme an, daß (a, x) mindestens zwei Elemente enthält. Denn andernfalls ist nichts mehr zu zeigen. Als nicht zusammenhängende Menge besitzt (a, x) eine Zerlegung in disjunkte offene Mengen O_1 und O_2 , wobei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $x_1 < x_2$ für ein $x_1 \in O_1$ und ein $x_2 \in O_2$. Sei (a', b') ein maximales offenes Intervall, das x_1 enthält. Dann folgt wegen $b' < x_2$ $b' \in O_1$. Weiter sei (a'', b'') ein maximales offenes Intervall, das b' enthält. Wie man sich leicht überlegt, ist a'' ein unmittelbarer Vorgänger von b' .

3.18 Satz Es seien K eine Kette, die genau eine nichttriviale Zusammenhangskomponente I besitzt und ψ ein K -Homomorphismus von $C(X, K)$ in K mit der Eigenschaft, daß die Einschränkung von ψ auf $C(X, I)$ fest in $p \in X$ ist. Dann ist auch ψ fest in p .

Beweis: Es werden folgende Fälle betrachtet:

1. $\psi(f) \in I$ und $f(p) \in I$.

Mit $a = \psi(f) \wedge f(p)$ und $b = \psi(f) \vee f(p)$ ist $(f \wedge \underline{a}) \vee \underline{a}$ in $C(X, I)$ und es folgt $f(p) = (f(p) \wedge \underline{b}(p)) \vee \underline{a}(p) = ((f \wedge \underline{b}) \vee \underline{a})(p) = \psi((f \wedge \underline{b}) \vee \underline{a}) = (\psi(f) \wedge b) \vee a = \psi(f)$.

2. $a = \psi(f) \in I$ und $b = f(p) \notin I$.

Angenommen $c < b$ für eine obere Schranke c von I . Dann gibt es nach dem vorangehenden Lemma eine offen-abgeschlossene Umgebung O von b die $[b, +)$ enthält, wobei $c < x$ für alle $x \in O$. Durch

$$g(x) = \begin{cases} d, & \text{falls } x \in f^{-1}(O) \\ b, & \text{falls } x \notin f^{-1}(O) \end{cases},$$

wobei d ein Element in I ist, das keine obere Schranke von I ist, wird eine stetige Abbildung von X in K definiert. Wegen $\psi(f) \in I$ und $\underline{c} \leq f \vee g$, das heißt $c = \psi(\underline{c}) \leq \psi(f) \vee \psi(g)$, folgt $\underline{c} \leq \psi(g)$. Da $g(p) = d < d'$ für ein $d' \in I$, hat man $\psi(g \wedge \underline{d}') = d' \in I$ und $(g \wedge \underline{d}')(p) = g(p) \wedge d' = d \in I$. Mit

$g \wedge d \in C(X, I)$ erhält man einen Widerspruch zu 1.. Dual behandelt man den Fall, daß $f(p) < c$ für eine untere Schranke c von I .

3. Sei $a = f(p) \in I$ und $b = \psi(f) \notin I$.

Angenommen $c < \psi(f)$ für eine obere Schranke c von I . Man betrachtet wiederum eine offen-abgeschlossene Umgebung O von b mit $[b, \rightarrow) \subseteq O$ und $c < x$ für alle $x \in O$. Durch

$$g(x) = \begin{cases} a, & \text{falls } x \in f^{-1}(O) \\ b, & \text{falls } x \notin f^{-1}(O) \end{cases} \quad h(x) = \begin{cases} b, & \text{falls } x \in f^{-1}(O) \\ a, & \text{falls } x \notin f^{-1}(O) \end{cases}$$

werden stetige Abbildungen von X in K definiert. Mit $f \wedge g \leq b$, $g \wedge h = a$ und $g \vee h = b$, daß heißt $\psi(f) \wedge \psi(g) < b$, $\psi(g) \wedge \psi(h) = a$ und $\psi(g) \vee \psi(h) = b$, hat man wegen $\psi(f) = b$ $\psi(g) = a$. Es ergibt sich $\psi(g) \in I$ und $c < g(p)$. Das führt wie in 2. zu einen Widerspruch. Der Fall, daß $\psi(f) < c$ für eine untere Schranke c von I ist dual zu behandeln.

4. Sei $a = \psi(f) \notin I$ und $b = f(p) \notin I$.

Auf Grund der Dualität kann man annehmen, daß $\psi(f) < f(p)$. Ist $\psi(f) < x < f(p)$ für alle $x \in I$, so hat man $\psi(f \vee c) = c < f(p) = (f \vee c)(p)$ für ein $c \in I$ und erhält wie in 2. einen Widerspruch.

Andernfalls werde angenommen, daß $x < a$ für alle $x \in I$. Es gibt eine offen-abgeschlossene Menge O mit $[b, \rightarrow) \subseteq O$ und ein $l \in K$, $a < l$ so, daß außerdem $l < y$ für jedes $y \in O$. Wegen $\psi(f) = a$ existiert ein $x \in X$ mit $f(x) \leq a$. Sei $c \in I$ und

$$g(x) = \begin{cases} c, & \text{falls } x \in f^{-1}(O) \\ b, & \text{falls } x \notin f^{-1}(O) \end{cases}$$

Wegen $g(p) = c \in I$ folgt nach 3. und 1. $\psi(g) = g(p) \in I$. Da $l < g \vee f$, ergibt sich $\psi(f) = a < \psi(g \vee f) = \psi(g) \vee \psi(f) = \psi(f)$, ein Widerspruch.

Ungelöst bleibt das Problem, für welche zusammenhängenden Ketten K , die nicht stark K -Hausdorffsch sind, jeder K -Homomorphismus ψ von $C(X, K)$ in K für alle kompakten Räume X fest in X ist. Das folgende Beispiel zeigt, daß es zusammenhängende Ketten gibt, die obi-

ge Eigenschaft nicht besitzen.

3.18 Beispiel Sei ω_1 die kleinste überabzählbare Ordinalzahl und $W(\omega_1)$ die Kette aller Ordinalzahlen, die kleiner als ω_1 sind. Weiter setze man $I=[0,1)$ und betrachte man das Produkt $P=W(\omega_1) \times I$, versehen mit der lexikographischen Ordnung. P_d sei die Kette, die entsteht, wenn man die Menge $W(\omega_1) \times I$ mit der zu P dualen Ordnung versieht. $K=P+\{\omega_1\}+P_d$ ist eine am Punkte ω_1 durchgeführte Spiegelung der Kette P . Sie ist vollständig und enthält keine Sprünge und ist somit zusammenhängend. Sei $X=[0,1]$. Dann ist X kompakt, ja sogar K -kompakt. Es läßt sich zeigen, daß die in ω_1 konstante Abbildung die einzige Abbildung ist, die ω_1 als Bildpunkt besitzt. Auf Grund des Zusammenhanges von X folgt dann $C(X,K) = C(X,P+\{\omega_1\}) \cup C(X,\{\omega_1\}+P_d)$ und $C(X,P+\{\omega_1\}) \cap C(X,\{\omega_1\}+P_d) = \{\underline{\omega_1}\}$. Wie in 3.15 läßt sich ein K -Homomorphismus von $C(X,K)$ in K konstruieren, der nicht fest in X ist.

Ist K eine zusammenhängende Kette und X ein kompakter Raum, so kann man in K solche Punkte betrachten, die die Eigenschaft besitzen, daß a die einzige Abbildung des Verbandes $C(X,K)$ ist, in deren Bildmenge a liegt. Solche Punkte nenne man Konstantpunkte für X . Notwendig dafür, daß jeder

K -Homomorphismus von $C(X, K)$ in K fest in K ist, ist die Bedingung, daß mit a auch alle $x \leq a, x \in K$ oder alle $a \leq y, y \in K$ Konstantpunkte für X sind. Möglicherweise läßt sich das ausstehende Problem dadurch lösen, indem man für verschiedenen "Testräume" (insbesondere für vollständige zusammenhängende Ketten) die Menge der Konstantpunkte untersucht.

§ 4 Eine Kennzeichnung K -kompakter Räume

Die Ergebnisse, die in § 3 für kompakte Räume hergeleitet wurden, sollen in diesem Kapitel auf K -kompakte Räume übertragen werden.

- 4.1 Lemma X, Y seien topologische Räume und h ein Homöomorphismus von X auf Y . Dann induziert h einen K -Isomorphismus h^* von $C(Y, K)$ auf $C(X, K)$. Ein K -Homomorphismus $\psi: C(X, K) \rightarrow K$ ist dann und nur dann fest in $x \in X$, wenn $\psi h^*: C(Y, K) \rightarrow K$ fest in $h(x) \in Y$ ist.

Beweis: Durch $h^*(f) = fh$ für alle $f \in C(Y, K)$ wird eine Abbildung von $C(Y, K)$ in $C(X, K)$ definiert. Wie man leicht nachrechnet ist h^* ein K -Isomorphismus, der die geforderten Eigenschaften hat.

- 4.2 Satz Sei K eine nulldimensionale Kette und X ein K -kompakter Raum. Dann ist jeder K -Homomorphismus von $C(X, K)$ in K fest in X .

Beweis: Als K -kompakter Raum ist X nulldimensional und

somit D -regulär. Dann ist X homöomorph zu $\beta_D(X)$ und wegen 4.1 genügt es zu zeigen, daß jeder K -Homomorphismus von $C(\beta_D(X), K)$ in K fest in $\beta_D(X)$ ist. Sei ψ ein solcher K -Homomorphismus und i ein K -Isomorphismus von $C_{\beta}(\beta_D X, S_O(K))$ auf $C(\beta_D(X), K)$. Dann ist $g = \psi i$ ein K -Homomorphismus von $C_{\beta}(\beta_D X, K)$ in K , der nach 3.12 fest in einem Punkte $p \in \beta_D X$ ist. Es bleibt zu zeigen, daß p in $\beta_D(X)$ liegt. Hieraus folgt nämlich $\psi(f) = \psi i(i^{-1}(f)) = \psi i(\bar{f}) = \bar{f}(p) = f(p)$ für alle $f \in C(\beta_D(X), K)$.

Angenommen $p \in \beta_D X \setminus \beta_D(X)$. Dann gibt es nach 1.9 ein h in $C(\beta_D X, S_O(K))$ mit $h\beta_D(X) \subset K$ und $h(p) \notin K$. Es folgt $h \in C_{\beta}(\beta_D X, S_O(K))$ und, da $g: C_{\beta}(\beta_D X, S_O(K)) \rightarrow K$ fest in p ist, $h(p) = g(h) \in K$. Das ist ein Widerspruch.

Analog erhält man, wenn man D stets durch das Einheitsintervall I ersetzt:

4.3 Satz Sei K eine Kette mit der Eigenschaft, daß für K -reguläre Räume Y jeder K -Homomorphismus von $C_{\beta}(\beta_I Y, S(K))$ in K fest in $\beta_I Y$ ist, und ist X ein K -kompakter Raum, so ist jeder K -Homomorphismus von $C(X, K)$ in K fest in X .

Insbesondere gilt 4.3, wenn K eine zusammenhängende Teilkette von $\mathbb{R}$ ist.

Für beliebige Ketten K und K -reguläre Räume X gelten sogar die Umkehrungen der Sätze 4.2 und 4.3.

4.4 Satz Sei K eine beliebige Kette, X ein K -regulärer Raum und jeder K -Homomorphismus von $C(X, K)$ in K fest in X . Dann ist X K -kompakt.

Beweis: Da X K -regulär ist, sind X und $\beta_K(X)$ homöomorph. Da weiter nach 1.3 die Klasse aller K -kompakten Räume gegenüber Bildung homöomorpher Räume abgeschlossen ist, genügt es zu zeigen, daß $\beta_K(X) = \beta_K X$.

Sei $p \in \beta_K X$, π_p der zu p gehörige feste K -Homomorphismus

von $C(\beta_K X, K)$ in K und i der K -Isomorphismus von $C(\beta_K(X), K)$ auf $C(\beta_K X, K)$, der jedem $f \in C(\beta_K(X), K)$ die eindeutig bestimmte Fortsetzung $\bar{f} \in C(\beta_K X, K)$ zuordnet. π_p^i ist ein K -Homomorphismus von $C(\beta_K(X), K)$ in K , der nach Voraussetzung fest in einem Punkte $x \in \beta_K(X)$ ist. Man hat $\bar{f}(x) = f(x) = \pi_p^i(f) = \pi_p^i(\bar{f}) = \bar{f}(p)$ für alle $f \in C(\beta_K(X), K)$. Da $\beta_K X$ K -regulär ist, folgt $x = p$ und somit $\beta_K(X) = \beta_K X$.

Zusammen aus 4.2 , 4.3 und 4.4 folgt

4.5 Satz Die Kette K sei nulldimensional oder sie genüge den Voraussetzungen von Satz 4.3 . Für einen K -regulären Raum X sind dann äquivalent:

- (a) X ist K -kompakt,
- (b) jeder K -Homomorphismus von $C(X, K)$ in K ist fest in X .

Ersetzt man K durch $D, \mathbb{Z}, \mathbb{R}$ bzw. das Einheitsintervall I , so liefert 4.5 Charakterisierungen für die Klassen aller nulldimensional kompakten, $\mathbb{Z}$ -kompakten, reellkompakten bzw. kompakten topologischen Räume.

§ 5 Diskrete topologische Räume

Im § 4 wurden K -kompakte Räume X durch Eigenschaften der zugehörigen Funktionenverbände $C(X, K)$ charakterisiert. Hierbei mußte man sich auf bestimmte Ketten beschränken. Im folgenden werde die Klasse der zu untersuchenden topologischen Räume dadurch eingeschränkt, daß man nur diskrete Räume betrachtet. Für beliebige Ketten K lassen sich dann die Sätze von § 4 übertragen.

5.1 Lemma Sei X ein diskreter topologischer Raum und K eine beliebige Kette. Dann gibt es zu $x, y \in \beta_I X$, $x \neq y$ und $a, b \in K^0$, $a < b$ ein $\tilde{f} \in C_\beta(\beta_I X, S(K))$, so daß $\tilde{f}(x) < a$ und $b < \tilde{f}(y)$.

Beweis: Sei U_x eine Umgebung von x in $\beta_I X$, die y nicht enthält, und $c, d \in K$ mit $c < a$ und $b < d$. Da $\beta_I(X)$ diskret ist, wird durch

$$f(x) = \begin{cases} c, & \text{falls } x \in U_x \cap \beta_I(X) \\ d, & \text{falls } x \notin U_x \cap \beta_I(X) \end{cases}$$

eine stetige Abbildung von $\beta_I(X)$ in K definiert, die eine eindeutig bestimmte Fortsetzung $\tilde{f} \in C(\beta_I X, S(K))$ besitzt. Wie man leicht nachrechnet, hat $\tilde{f}$ die gewünschten Eigenschaften.

Mit 3.13 und 4.5 folgt

5.2 Satz Sei X ein diskreter topologischer Raum und K eine beliebige Kette. Dann sind äquivalent

- (a) X ist K -kompakt,
- (b) Jeder K -Homomorphismus von K^X in K ist eine Projektion.

Ersetzt man in 5.2 K durch das Einheitsintervall I , so erhält man

5.3 Satz Sei X ein diskreter topologischer Raum. Dann sind äquivalent

- (a) X ist kompakt,
- (b) X ist endlich,
- (c) jeder I -Homomorphismus von I^X in I ist eine Projektion.

Ziel der folgenden Betrachtungen ist es, einen zu 5.3 analogen Satz für in $\mathbb{R}$ abgeschlossene Teilketten zu gewinnen, die $\mathbb{Z}$ umfassen. Hierzu ist es notwendig, weitere Begriffe einzuführen.

Sei X eine Menge. Unter einem $\{0,1\}$ -wertigen Maß auf X versteht man eine auf der Potenzmenge von X abzählbar additive Abbildung in die Menge $\{0,1\}$. Eine Kardinalzahl $\aleph_\alpha$ heißt meßbar, wenn es eine Menge X der Mächtigkeit $\aleph_\alpha$ und ein $\{0,1\}$ -wertiges Maß μ auf X gibt, so daß $\mu(X)=1$ und $\mu(\{x\})=0$ für jedes $x \in X$ gilt. Für eine sehr große Klasse von Kardinalzahlen kann man nachweisen, daß sie nichtmeßbar sind. Es ist jedoch ein ungelöstes Problem, ob jede Kardinalzahl nichtmeßbar ist. Sei die Mächtigkeit einer Menge X mit $|X|$ bezeichnet. Der folgende bekannte Satz (Vgl. [5] 12.2) liefert eine topologische Kennzeichnung nichtmeßbarer Mengen.

5.4 Satz Ein diskreter topologischer Raum X ist genau dann reellkompakt, wenn $|X|$ nichtmeßbar ist.

Ein topologischer Raum X heißt stark nulldimensional, wenn zu beliebigen disjunkten abgeschlossenen Mengen A, B in X eine offen-abgeschlossenen Menge existiert, die A und B trennt. Da stets Hausdorffräume betrachtet werden, ist jeder stark nulldimensionale Raum nulldimensional. Für Lindelöfräume gilt auch die Umkehrung.

5.5 Satz Sei X ein Lindelöfraum. Dann sind äquivalent

- (a) X ist nulldimensional,
- (b) X ist stark nulldimensional.

Beweis: Es genügt zu zeigen, daß aus (a) (b) folgt. Hierzu betrachte man disjunkte abgeschlossene Mengen A, B in X und eine abzählbare Basis $\mathcal{L}$ aus offen-abgeschlossenen Mengen. Zu jedem $a \in A$ gibt es dann ein $O_x \in \mathcal{L}$, so daß $x \in O_x \subseteq X \setminus B$. Da $\mathcal{L}' = \{O_x \mid x \in A\}$ abzählbar, hat man $\mathcal{L}' = \{S_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Das System $\mathcal{S} = \{S_i \setminus \bigcup_{j < i} S_j \mid i \in \mathbb{N}\}$ besteht dann aus paarweisen disjunkten offen-abgeschlossenen Mengen und überdeckt A . Somit ist $S = \bigcup_{S \in \mathcal{S}} S$ eine offen-abgeschlossene Menge, die A und B trennt.

5.6 Satz Für stark nulldimensionale Räume sind äquivalent

- (a) X ist reellkompakt,
- (b) X ist $\mathbb{Z}$ -kompakt.

Daß aus (b) stets (a) folgt, ergibt sich, da $\mathbb{Z}$ abgeschlossener Unterraum von $\mathbb{R}$ ist, unmittelbar aus der Definition des reellkompakten Raumes. Die Umkehrung wird in [9] 6.4 bewiesen.

5.7 Satz X sei ein diskreter Raum und K eine in $\mathbb{R}$ abgeschlossene Teilkette, die $\mathbb{Z}$ umfaßt. Dann sind äquivalent

- (a) X ist K -kompakt,
- (b) $|X|$ ist nichtmeßbar,
- (c) jeder K -Homomorphismus von K^X in K ist eine Projektion.

Beweis: Die Äquivalenz von (a) und (c) folgt unmittelbar aus 5.2. Da jeder diskrete Raum stark nulldimensional ist, folgt mit 5.6, daß X genau dann reellkompakt ist, wenn X $\mathbb{Z}$ -kompakt ist. Das ist gleichbedeutend damit, daß für eine abgeschlossene Teilkette K von $\mathbb{R}$, die $\mathbb{Z}$ enthält, X K -kompakt ist. Mit 5.4 erhält man dann die Äquivalenz der Aussagen (a) und (b).

Die wesentlichen Aussagen in den Sätzen 5.3 sowie 5.5 sind die Äquivalenzen von (b) und (c). Sie sind mengen- bzw. ordnungstheoretische Aussagen, die mit topologischen

Hilfsmitteln bewiesen wurden. Es ist ein interessantes Problem, ob man für beliebige Ketten K einen zu 5.7. analogen Satz formulieren kann, in dem (b) durch irgend eine zu findende mengentheoretische Aussage ersetzt wird.

§ 6 K-Homomorphismen und Ringhomomorphismen

$\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ und D sind zugleich in natürlicher Weise kommutative Ringe mit Einselement. Die Ringstrukturen sind außerdem mit den Ordnungstopologien verträglich. Somit sind $C(X, \mathbb{R})$, $C(X, \mathbb{Q})$, $C(X, \mathbb{Z})$ und $C(X, D)$, wenn man Addition und Multiplikation argumentweise erklärt, für beliebige topologische Räume X wiederum kommutative Ringe mit Einselement. Unter Ringhomomorphismen zwischen kommutativen Ringen mit Einselement wollen wir mit der Ringstruktur verträgliche Abbildungen verstehen, die Einselement in Einselement überführen. Im folgenden sollen die Beziehungen zwischen den Ringhomomorphismen von $C(X, K)$ in K und den entsprechenden K -Homomorphismen für die oben genannten Ketten untersucht werden.

6.1 Satz Für $K = \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ bzw. D ist jeder Ringhomomorphismus von $C(X, K)$ in K ein K -Homomorphismus.

Beweis: 1. Für $f, g \in C(X, D)$ gilt $f \wedge g = f \cdot g$ und $f \vee g = f + g + f \cdot g$. Außerdem führt ein Ringhomomorphismus $\underline{1}$ in 1 und $\underline{0}$ in 0 über. Somit ist jeder Ringhomomorphismus von $C(X, D)$ in D ein D -Homomorphismus.

2. Für $K = \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ und $f \in C(X, K)$ gilt $\underline{0} \leq f$ genau dann, wenn sich f als Summe von Quadraten darstellen läßt. Eine entsprechende Aussage ist in den Ringen $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Z}$ richtig.

Hieraus ergibt sich, daß für jeden Ringhomomorphismus ψ von $C(X, K)$ in K aus $0 \leq f$ stets $0 \leq \psi(f)$ folgt. Da $0 \leq f$ äquivalent zu $f = |f|$ ist und eine entsprechende Aussage in K gilt, hat man $\psi(|f|) = |\psi(f)|$. Schließlich gilt $2(f \vee g) = f + g + |f - g|$ und $f \wedge g = -(-f) \vee (-g)$, und damit ist jeder Ringhomomorphismus von $C(X, K)$ in K ein Verbandshomomorphismus. Daß jeder Ringhomomorphismus von $C(X, K)$ in K konstante Funktionen in die zugehörigen konstanten Werte überführt, ergibt sich daraus, daß gefordert wurde, daß 1 in 1 übergeht, und aus der Tatsache daß $\mathbb{Q}$ Integritätsbereich ist, der dicht in $\mathbb{R}$ liegt.

6.2 Satz Sei R ein kommutativer topologischer Ring mit Eins, X ein R -regulärer Raum und jeder Ringhomomorphismus von $C(X, R)$ in R fest in X . Dann ist X R -kompakt.

Beweis: Ist R ein topologischer Ring, so ist, wenn man Addition und Multiplikation argumentweise erklärt, $C(X, R)$ wiederum ein Ring. Jedem $f \in C(X, R)$ läßt sich ein eindeutig bestimmtes $\bar{f} \in \beta_R(X, R)$ zuordnen und diese Zuordnung ist ein Ringisomorphismus. Völlig analog zu 4.4 ergibt sich jetzt der Beweis des obigen Satzes.

Unmittelbar mit 6.1 und 6.2 erhält man

6.3 Satz Sei $K = \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{D}$. Für K -reguläre X sind äquivalent:

- (a) X ist K -kompakt,
- (b) jeder K -Homomorphismus von $C(X, K)$ in K ist fest in X ,
- (c) jeder Ringhomomorphismus von $C(X, K)$ in K ist fest in X .

Im folgenden wird das schon in 1.8 erwähnte Problem studiert, ob jeder nulldimensionale reellkompakte Raum $\mathbb{Z}$ -kompakt ist. Man betrachte hierzu nulldimensionale in $\mathbb{R}$ abgeschlossene Teilketten L , die $\mathbb{Z}$ enthalten.

6.4 Satz Sei L eine nulldimensionale, abgeschlossene Teilkette von $\mathbb{R}$, die $\mathbb{Z}$ enthält. Dann gilt $K(L) = K(\mathbb{Z})$.

Beweis: Da $\mathbb{Z}$ ein abgeschlossener Unterraum von L ist, hat man $\mathbb{Z} \in K(L)$ und somit $K(\mathbb{Z}) \subset K(L)$. Weiter ist L als abgeschlossener Unterraum von $\mathbb{R}$ reellkompakter Lindelöf-Raum, so daß nach 5.5 und 5.6 $L \in K(\mathbb{Z})$, das heißt $K(L) \subset K(\mathbb{Z})$.

6.5 Satz Sei L eine nulldimensionale, abgeschlossene Teilkette von $\mathbb{R}$, die $\mathbb{Z}$ enthält. Dann sind äquivalent

- (a) jeder nulldimensionale, reellkompakte Raum ist $\mathbb{Z}$ -kompakt,
- (b) für nulldimensionale Räume X läßt sich jeder L -Homomorphismus von $C(X, L)$ in L zu einem $\mathbb{R}$ -Homomorphismus von $C(X, \mathbb{R})$ in $\mathbb{R}$ fortsetzen.

Beweis: (a) impliziert (b): Ein nulldimensionaler, reellkompakter Raum ist nach Voraussetzung $\mathbb{Z}$ -kompakt und wegen 6.4 daher auch L -kompakt. Somit hat jeder L -Homomorphismus ψ von $C(X, L)$ in L die Form $\psi(f) = f(p)$ für alle $f \in C(X, L)$. Setzt man $\bar{\psi}(f) = f(p)$ für alle $f \in C(X, \mathbb{R})$, so ist $\bar{\psi}$ Fortsetzung von ψ .

(b) impliziert (a): Sei X ein nulldimensionaler, reellkompakter Raum, L eine nulldimensionale, abgeschlossene Teilkette von $\mathbb{R}$, die $\mathbb{Z}$ enthält, $\psi: C(X, L) \rightarrow L$ ein L -Homomorphismus und $\bar{\psi}: C(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ dessen Fortsetzung. Da X reellkompakt ist, ist $\bar{\psi}$ und somit auch ψ fest in X . Nach 4.4 ist X L -kompakt, also nach 6.4 auch $\mathbb{Z}$ -kompakt.

Auf Grund von 6.3 bleibt obiger Satz richtig, wenn man L durch $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{Z}$ ersetzt und Ringe und Ringhomomorphismen betrachtet.

Kapitel II : Dualität

§ 7 Kategorielle Grundbegriffe

In diesem Kapitel sollen die später auftretenden kategoriellen Begriffe und Bezeichnungen zusammengestellt werden.

Ist $\mathcal{C}$ eine Kategorie, so sei $|\mathcal{C}|$ die Klasse der Objekte in $\mathcal{C}$ und $(X,Y)_{\mathcal{C}}$ die Menge der Morphismen von X nach Y . Meng sei die Kategorie der Mengen und Abbildungen, Top die Kategorie der topologischen Räume mit stetigen Abbildungen, Ring die Kategorie der kommutativen Ringe mit Einselement und Ringhomomorphismen, die Einselemente respektieren, und K-Verb die Kategorie der K -Verbände und K -Homomorphismen.

Ein wichtiges Hilfsmittel zur Untersuchung von Kategorien sind Funktoren. Jedem Objekt K einer Kategorie lassen sich die ko- bzw. kontravarianten Funktoren $(K, \cdot)_{\mathcal{C}}$ und $(\cdot, K)_{\mathcal{C}}$ von $\mathcal{C}$ in die Kategorie der Mengen zuordnen. Zwei Funktoren F und G von einer Kategorie $\mathcal{A}$ in eine Kategorie $\mathcal{B}$ heißen äquivalent, wenn eine Familie von Isomorphismen $\{\eta_A: FA \rightarrow GA \mid A \in |\mathcal{A}|\}$ existiert, so daß für beliebige Objekte A, B in $\mathcal{A}$ und jeden Morphismus $f \in (A, B)$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} FA & \xrightarrow{Ff} & FB \\ \eta_A \downarrow & & \downarrow \eta_B \\ GA & \xrightarrow{Gf} & GB \end{array} \quad \text{kommutiert.}$$

Man schreibt dann $F \cong G$. Zwei Kategorien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ heißen äquivalent, wenn es Funktoren $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ und $G: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ so gibt, daß $GF \cong 1_{\mathcal{A}}$ und $FG \cong 1_{\mathcal{B}}$. $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ heißen zueinander dualäquivalent, falls F und G kontravariante Funktoren sind.

Von Bedeutung ist schließlich der Begriff der reflektiven Teilkategorie.

7. 1 Definition Es sei $\mathcal{A}$ eine volle Teilkategorie von $\mathcal{L}$.

- (a) Ein Morphismus $r_X: X \rightarrow X_\alpha$ heißt $\mathcal{A}$ -Reflexion von $X \in |\mathcal{L}|$, wenn $X_\alpha \in |\mathcal{A}|$ und zu jedem $Y \in |\mathcal{A}|$ und $f \in (X, Y)$ genau ein $\bar{f} \in (X, Y)_\mathcal{A}$ existiert mit $\bar{f} r_X = f$.
- (b) $\mathcal{A}$ heißt reflektiv in $\mathcal{L}$, wenn zu jedem $X \in \mathcal{L}$ eine $\mathcal{A}$ -Reflexion existiert.

Im folgenden sei, falls nicht anders erwähnt, K stets eine nulldimensionale Kette oder eine zusammenhängende Teilkette von R .

§ 8 Allgemeine Dualitätssätze

Es sei R ein topologischer Raum, der eine mit der Topologie verträglichen algebraischen Struktur besitzt. Für jedes $X \in |\text{Top}|$ trägt $(X, R)_{\text{Top}}$ in natürlicher Weise eine algebraische Struktur des gleichen Typs wie R , und jedes $f \in (X, Y)_{\text{Top}}$ induziert ein $(f, R)_{\text{Top}}: (Y, R)_{\text{Top}} \rightarrow (X, R)_{\text{Top}}$. Durch $(\cdot, R)_{\text{Top}}$ ist somit ein Funktor von Top in die entsprechende algebraische Kategorie gegeben. Geht man umgekehrt von einer algebraischen Kategorie $\mathcal{A}$ aus, und ist $R \in |\mathcal{A}|$ wiederum ein Objekt, das eine mit der algebraischen Struktur verträglichen Topologie trägt, so hat man den Funktor $(\cdot, R)_\mathcal{A}$ von $\mathcal{A}$ in die Kategorie der Mengen. Für jedes $A \in \mathcal{A}$ ist außerdem $(A, R)_\mathcal{A}$ ein abgeschlossener Unterraum des Produktraumes R^A . Im folgenden wollen wir uns auf Teilkategorien $\mathcal{X}$ in Top beschränken. Als algebraische Kategorien betrachten wir Teilkategorien von Ring und $K\text{-Verb}$. In diesen Fällen ergibt sich, daß $(\cdot, K)_\mathcal{X}$ und $(\cdot, K)_\mathcal{A}$ Dualquivalenzen zwischen den Kategorien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{X}$ liefern, die zueinander invers sind.

Mit $\mathcal{X}(K)$ werde die Kategorie aller K -kompakten topologischen Räume bezeichnet. Dann ist $(\cdot, K)_{\mathcal{X}(K)}$ ein Funktor in die Kategorie der K -Verbände. $\mathcal{L}(K)$ sei die volle Teilkategorie in $K\text{-Verb}$, die von allen Bildobjekten unter

$(\cdot, K)_{\mathcal{X}(K)}$ erzeugt wird.

8.1 Lemma Sei Y ein K -regulärer und X ein beliebiger topologischer Raum. Dann sind äquivalent:

- (a) $f: X \rightarrow Y$ ist stetig,
- (b) für jedes $g \in (Y, K)_{\text{Top}}$ ist $gf: X \rightarrow K$ stetig.

Beweis: Es ist klar, daß aus (a) stets (b) folgt. Sei umgekehrt (b) erfüllt und A eine abgeschlossene Teilmenge von Y . Ist K nulldimensional, so ist auch Y als K -regulärer Raum nulldimensional, und es gibt zu jedem $x \in Y \setminus A$ eine stetige Abbildung g_x von Y in K mit $g_x(y) = a$ für alle $y \in A$ und $g_x(x) \neq a$, wobei a ein festes Element in K ist. Man hat $A = \bigcap_{x \in Y \setminus A} g_x^{-1}(a)$ und somit $f^{-1}(A) = f^{-1}(\bigcap_{x \in Y \setminus A} g_x^{-1}(a)) = \bigcap_{x \in Y \setminus A} (g_x f)^{-1}(a)$. Da alle $g_x f$ stetig sind, ist jedes $(g_x f)^{-1}(a)$ abgeschlossen in X . Im Falle, daß K eine zusammenhängende Teilkette von $\mathbb{R}$ ist, ergibt sich die Stetigkeit auf Grund der vollständigen Regularität von Y .

8.2 Lemma: Der Funktor $(\cdot, K)_{\mathcal{X}(K)}$ von $\mathcal{X}(K)$ in $\mathcal{C}(K)$ ist voll und treu. Außerdem ist $(\cdot, K)_{\mathcal{C}(K)}$ ein Funktor von $\mathcal{C}(K)$ in $\mathcal{X}(K)$.

Beweis: $(\cdot, K)_{\mathcal{X}(K)}$ ist treu, denn aus $X, Y \in |\mathcal{X}(K)|$, $f, g: Y \rightarrow X$ und $(f, K)_{\mathcal{X}(K)} = (g, K)_{\mathcal{X}(K)}$ folgt $hf = hg$ für alle $h \in (X, K)_{\mathcal{X}(K)}$. Da X K -regulär ist, erhält man sofort $f = g$.

Sei weiter $t: (Y, K)_{\mathcal{X}(K)} \rightarrow (X, K)_{\mathcal{X}(K)}$ und $\gamma \in ((X, K)_{\mathcal{X}(K)}, K)_{\mathcal{C}(K)}$.

Dann ist $\psi(t) \in ((Y, K)_{\mathcal{X}(K)}, K)_{\mathcal{C}(K)}$. Wegen der K -Kompaktheit von

X und Y gibt es eindeutig bestimmte Punkte $x \in X$ und $h(x) \in Y$, in denen ψ und $\psi(t)$ fest sind. Da jedem Punkt $x \in X$ sich der feste K -Homomorphismus $\pi_x \in ((X, K)_{\mathcal{X}(K)}, K)_{\mathcal{C}(K)}$ zuordnen

läßt, wird durch $x \mapsto h(x)$ eine Abbildung h von X in Y definiert. Laut Konstruktion gilt $(t, K)_{\mathcal{C}(K)}(\pi_x) = \pi_{h(x)}$. Weiter

hat man für beliebige $x \in X$ und $g \in (Y, K)_{\mathcal{H}(K)}$ $t(g)(x) =$

$\pi_x(t(g)) = \pi_x t(g) = (t, K)_{\mathcal{L}(K)}(\pi_x)(g) = \pi_{h(x)}(g) = gh(x)$ und so-

mit $gh = t(g) \in (X, K)_{\mathcal{H}(K)}$ für alle $g \in (Y, K)_{\mathcal{H}(K)}$. Nach Lemma 8.1 ist h dann stetig. Außerdem induziert h den Morphismus t und $(\cdot, K)_{\mathcal{H}(K)}$ ist somit voll. Für jedes $(X, K)_{\mathcal{H}(K)}$

$\in |\mathcal{L}(K)|$ ist $((X, K)_{\mathcal{H}(K)}, K)_{\mathcal{L}(K)}$ als abgeschlossener Unterraum des Produktraumes $K^{(X, K)_{\mathcal{H}(K)}}$ K -kompakt. Es bleibt daher lediglich die Stetigkeit von $(t, K)_{\mathcal{L}(K)}$ nachzuweisen.

Hierzu betrachte man $(g(x))_{g \in (X, K)_{\mathcal{H}(K)}} \in ((X, K)_{\mathcal{H}(K)}, K)_{\mathcal{L}(K)}$.

Dieses Element wird vermöge $(t, K)_{\mathcal{L}(K)}$ in das Element $(lh(x))_{l \in (Y, K)_{\mathcal{H}(K)}}$ überführt. Durchläuft l alle Elemente in $(Y, K)_{\mathcal{H}(K)}$, so durchläuft lh gewisse Elemente in $(X, K)_{\mathcal{H}(K)}$.

$(t, K)_{\mathcal{L}(K)}$ bildet also jedes Element $a = (g(x))_{g \in (X, K)_{\mathcal{H}(K)}}$ auf ein Element in $K^{(Y, K)_{\mathcal{H}(K)}}$ ab, das sich aus den Komponenten von a zusammensetzt und ist somit stetig.

8.3 Anmerkung Da für K -kompakte Räume $((X, K)_{\mathcal{H}(K)}, K)_{\mathcal{L}(K)}$ gerade aus allen festen K -Homomorphismen von $(X, K)_{\mathcal{H}(K)}$ in K besteht, entspricht dieser Raum gerade dem in 1.6 konstruierten Raum $\beta_K X$. Weiter ist für jedes $X \in \mathcal{H}(K)$ $\beta_K^X : X \rightarrow \beta_K X$ ein Homöomorphismus und es kommutiert für jedes $f \in (X, Y)_{\mathcal{H}(K)}$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad} & ((X, K)_{\mathcal{H}(K)}, K)_{\mathcal{L}(K)} \\ f \downarrow & & \downarrow ((f, K)_{\mathcal{H}(K)}, K)_{\mathcal{L}(K)} \\ Y & \xrightarrow{\quad} & ((Y, K)_{\mathcal{H}(K)}, K)_{\mathcal{L}(K)} \end{array} .$$

8.4 Satz Die Funktoren $(\cdot, K)_{\mathcal{L}(K)}$, $(\cdot, K)_{\mathcal{H}(K)}$ und $l_{\mathcal{H}(K)}$ bzw. $(\cdot, K)_{\mathcal{H}(K)}$, $(\cdot, K)_{\mathcal{L}(K)}$ und $l_{\mathcal{L}(K)}$ sind äquivalent.

Beweis: Die erste Äquivalenz folgt aus der obigen Anmerkung. Mit $(\cdot, K)_{\mathcal{C}(K)}(\cdot, K)_{\mathcal{K}(K)} \cong 1_{\mathcal{K}(K)}$ hat man weiter

$$(\cdot, K)_{\mathcal{K}(K)}(\cdot, K)_{\mathcal{C}(K)}(\cdot, K)_{\mathcal{K}(K)} \cong (\cdot, K)_{\mathcal{K}(K)} 1_{\mathcal{K}(K)} \cong (\cdot, K)_{\mathcal{K}(K)}$$

und, da $(\cdot, K)_{\mathcal{K}(K)}$ voll ist, $(\cdot, K)_{\mathcal{K}(K)}(\cdot, K)_{\mathcal{C}(K)} = 1_{\mathcal{C}(K)}$.

8.5 Satz Für nulldimensionale Ketten oder zusammenhängende Teilketten von $\mathbb{R}$ ist die Kategorie $\mathcal{K}(K)$ aller K -kompakten topologischen Räume zur K -Verbandskategorie $\mathcal{C}(K)$ in natürlicher Weise dualäquivalent.

Für die topologischen Ringe $R = \mathbb{D}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ und R -kompakte Räume X ist $((X, R)_{\mathcal{K}(R)}, R)_{\mathcal{C}(R)}$ ebenfalls gleich der Menge aller festen Ringhomomorphismen von $(X, R)_{\mathcal{K}(R)}$ in R . Somit bleiben die Aussagen von 8.1, 8.2 und 8.4 auch für solche Ringe richtig. Bezeichnet man die volle Teilkategorie in Ring die von den Funktionenringen $(X, R)_{\mathcal{K}(R)}$ erzeugt wird mit $\mathcal{R}(R)$, so erhält man

8.6 Satz Für die topologischen Ringe $R = \mathbb{D}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ist die Kategorie $\mathcal{K}(R)$ aller R -kompakten Räume zu Ringkategorie $\mathcal{R}(R)$ in natürlicher Weise dualäquivalent.

Faßt man $\mathbb{D}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ sowohl als Ketten als auch als topologische Ringe auf, so ergibt sich unmittelbar mit 8.5 und 8.6

8.7 Satz Die Kategorien $\mathcal{K}(R)$ und $\mathcal{C}(R)$ sind für $R = \mathbb{D}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ in natürlicher Weise äquivalent.

8.8 Beispiele

(a) Betrachtet man die Kette $\mathbb{D}$, so erhält man eine Dualität zwischen der Kategorie $\mathcal{K}(\mathbb{D})$ aller nulldimensiono-

nalen kompakten Räume und der Kategorie der Booleschen Algebren. Interpretiert man D als zweielementigen diskreten Ring, so ergibt sich eine Dualität zwischen $\mathcal{K}(D)$ und der Kategorie der Booleschen Ringe. Diese Zusammenhänge wurden schon im Jahre 1937 von M.H. Stone^[22] entdeckt. In dem Buch "Lectures on Boolean algebras" [7] findet man eine modernere Darstellung dieser Dinge. Eigenschaften, die sich in der einen Kategorie schwer beschreiben lassen, werden vermöge der Dualität oft in einfache Dinge überführt. Halmos bedient sich in [7] dieser Methode, um zu wichtigen Ergebnissen zu gelangen. Bei seiner Darstellung vermißt man jedoch kategorielle Formulierungen, durch die sich die Dinge etwas übersichtlicher gestalten.

- (b) Für die Kette oder den topologischen Ring $\mathbb{R}$ erhält man eine Dualität zwischen der Kategorie der reellkompakten Räume und der zugehörigen Kategorie von Funktionenverbänden oder Funktionenringen. Hier sind es die Beziehungen zu den Funktionenringen, mit deren Hilfe L. Gillman und M. Jerison in [5] reellkompakte Räume untersuchen.
- (c) Die Dualitäten, die sich für $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ ergeben, sind in der Literatur bisher noch nicht beachtet worden. Über die Theorie der $\mathbb{Z}$ -kompakten Räume schrieb R.L. Blefko in [3] : "The study of $\mathbb{Z}$ -compactness is still in a somewhat primitive state and remains at this time one of the particular areas of the general area of E-compactness most in need of further investigation and characterization." Möglicherweise kommt man mit Hilfe der in dieser Arbeit durchgeführten Betrachtungen einen Schritt weiter.

§ 9 Dualität zwischen der Kategorie der Mengen und Produktkategorien von Ketten

In 5.2 wurde gezeigt, daß für K -kompakte diskrete Räume X jeder K -Homomorphismus von K^X in K fest in X war. Das galt für beliebige Ketten K . Mit den Überlegungen von § 8 folgt, daß die Kategorie aller Mengen M , für die M als diskreter Raum K -kompakt ist, zur Kategorie aller Produkte K^M dualäquivalent ist.

Eine Menge X heiße K -kompakt, wenn X als diskreter Raum K -kompakt ist. $\text{Meng}(K)$ sei die Kategorie aller K -kompakten Mengen mit Abbildungen. Für jede kompakte Kette K ist $\text{Meng}(K)$ gerade die Kategorie End aller endlichen Mengen. Ist K eine abgeschlossene Teilkette von $\mathbb{R}$, die Zumfaßt, so ist $\text{Meng}(K)$ die Kategorie aller nichtmeßbaren Mengen. Wir werden an einigen Stellen von der mit der Axiomatik der Mengenlehre verträglichen Hypothese, daß die Kategorien Meng und $\text{Meng}(\mathbb{R})$ zusammenfallen, Gebrauch machen.

9.1 Satz Es sei K eine beliebige Kette. Dann sind die Kategorien $\text{Meng}(K)$ und $(\text{Meng}(K), K)_{\text{Meng}(K)}$ dualäquivalent.

$(\text{Meng}(K), K)_{\text{Meng}}$ ist gerade die Kategorie aller Produkte K^I mit $I \in \text{Meng}(K)$. Der Funktor, der die Dualäquivalenz erzeugt, ordnet jeder Menge I das Produkt K^I und jeder Abbildung $f: I \rightarrow J$ die zugehörige induzierte Abbildung von K^J in K^I zu.

Für kompakte Ketten K erhält man eine Dualität zwischen den Kategorien End und $(\text{End}, K)_{\text{End}}$. Ist M eine unendliche Menge, so gibt es einen K -Homomorphismus von K^M in K , der von einer Projektion verschieden ist.

Für Ketten K mit der Eigenschaft, daß für Mengen die Begriffe nichtmeßbar und K -kompakt zusammenfallen, hat man

eine Dualität zwischen Meng und der Kategorie $(\text{Meng}, K)_{\text{Meng}}$ aller Produkte von K. *) Bekannt ist der folgende

9.2 Satz Sei $\mathcal{L}$ eine bezüglich Produktbildung abgeschlossene Kategorie und X ein Objekt in $\mathcal{L}$, mit der Eigenschaft, daß jeder Morphismus $f: X \xrightarrow{I} X$ für beliebige Indexmengen I eine Projektion ist. Dann ist die aus allen Produkten von X bestehende Teilkategorie reflektiv in $\mathcal{L}$.

Es gibt daher Ketten K mit der Eigenschaft, daß $(\text{Meng}, K)_{\text{Meng}}$ reflektiv in $K\text{-Verb}$ ist. In der Kategorie der Hausdorff-Räume ist die Konstruktion eines Raumes R , der die Eigenschaft besitzt, daß für jede Indexmenge I die Projektionen die einzigen nichtkonstanten stetigen Abbildungen von R^I in R sind, sehr schwierig (vgl. [12]). Während man dort den Raum R als pathologisch bezeichnen kann, ist dies in der Kategorie der K -Verbände sicher nicht der Fall.

Die Betrachtungen bleiben richtig, wenn man an Stelle der Kette K die topologischen Ringe $\mathbb{D}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$, und $\mathbb{R}$ und die Teilkategorien in Ring, die jeweils von Produkten dieser Ringe erzeugt werden, betrachtet.

Zum Schluß wollen wir an einem lustigen Beispiel erläutern, wie man die in diesem Abschnitt gewonnenen Ergebnisse praktisch anwenden kann. Wir betrachten hierzu in $\mathbb{Z}$ die Teilkette $K = \{1, 2, \dots, 6\}$. Jeder K -Homomorphismus von K^n in K ist dann für beliebige natürliche Zahlen n eine Projektion. Man denke sich jetzt folgende Situation. In einer Schulklasse werden n Fächer unterrichtet. Die Leistungen der Schüler in diesen Fächern werden durch die Noten 1 bis 6 bewertet. Als der Tag der Zeugnisvergabe nahe war und

*) es wird die Hypothese $\text{Meng}(\mathbb{R}) = \text{Meng}$ vorausgesetzt.

die einzelnen Noten der Schüler feststanden, wandte sich der Schulleiter an den Klassenlehrer und stellte ihm die Aufgabe jedem Zeugnis eine Gesamtnote zwischen 1 und 6 so zuzuordnen, daß, wenn in einem Zeugnis alle Noten gleich waren, das Zeugnis diese Note als Gesamtnote erhielt. Außerdem sollte durch die Gesamtnotengebung die durch die Zeugnisse gegebene Ordnung nicht verletzt werden. Jedes später auftretende Zeugnis sollte sich schließlich nachträglich noch einordnen lassen. Dem Lehrer blieb falls er unsere Theorie kannte, nichts anderes übrig, als ein beliebiges Fach herauszugreifen, und in der Gesamtnotengebung sich nach diesem Fach zu richten. Andere Möglichkeiten gibt es nicht.

§ 10 Die Kategorien $\mathcal{C}(K)$

Um Aussagen über die Kategorien $\mathcal{C}(K)$ zu gewinnen, kann man alle kategoriell formulierten Sätze, die in $\mathcal{K}(K)$ gelten, in ihrer dualen Form in $\mathcal{C}(K)$ aussprechen. Hier von wird im nächsten Paragraphen Gebrauch gemacht. Wir wollen zunächst für spezielle nulldimensionale Ketten, nämlich für Ordinalketten, die Kategorien $\mathcal{C}(K)$ untersuchen und vergleichen.

Ist α eine beliebige Ordinalzahl, so sei D_α die Kette aller Ordinalzahlen, die kleiner als α sind. Die zu $\mathcal{K}(D_\alpha)$ duale Kategorie von D_α -Verbänden sei $\mathcal{C}(\alpha)$. Für jede natürliche Zahl n , die größer als 3 ist besteht $\mathcal{K}(D_n)$ aus allen nulldimensionalen kompakten topologischen Räumen. Man erhält also für jedes n die gleiche Kategorie. Erstaunlicherweise gilt diese Aussage nicht für die zugehörigen Verbandskategorien $\mathcal{C}(n)$. Es ergibt sich sogar,

daß für $n \neq m$ kein Objekt in $\mathcal{C}(n)$ zu irgendeinem Objekt in $\mathcal{C}(m)$ verbandsisomorph ist. Dies folgt aus einer noch etwas allgemeineren Aussage.

10.1 Lemma Es seien α, β Ordinalzahlen mit $\alpha \leq \beta$, $(X, D_\alpha) \in |\mathcal{C}(\alpha)|$, $(Y, D_\beta) \in |\mathcal{C}(\beta)|$ und i ein Verbandsisomorphismus von (X, D_α) in (Y, D_β) . Ist $\underline{x}$ die in $y \in D_\alpha$ konstante Funktion aus (X, D_α) , so wird diese durch i in die entsprechende konstante Funktion in (Y, D_β) überführt.

Beweis: Eine im Punkte $y \in D_\alpha$ konstante Funktion in (X, D_α) werde mit $\underline{x}$ bezeichnet. Für eine entsprechende konstante Funktion in (Y, D_β) schreibe man $\underline{y}_\beta$. Der Beweis wird durch transfinite Induktion erbracht.

- (1) Durch einen Verbandsisomorphismus wird ein kleinstes Element in ein kleinstes Element überführt. Somit hat man $i(\underline{1}_\alpha) = \underline{1}_\beta$.
- (2) Die Behauptung sei richtig für alle $\gamma < \lambda$, wobei $\lambda < \alpha$. Man unterscheidet dann zwei Fälle.
 - (a) λ ist Limeszahl. Es gilt dann $\underline{\lambda}_\alpha = \sup_{\gamma < \lambda} \underline{\gamma}_\alpha$ und, da ein Verbandsisomorphismus Supremum in Supremum überführt, $i(\underline{\lambda}_\alpha) = i(\sup_{\gamma < \lambda} \underline{\gamma}_\alpha) = \sup_{\gamma < \lambda} i(\underline{\gamma}_\alpha) = \sup_{\gamma < \lambda} \underline{\gamma}_\beta = \underline{\lambda}_\beta$.
 - (b) λ besitze einen unmittelbaren Vorgänger λ_0 . Aus $\underline{\lambda}_{\alpha_0} < \underline{\lambda}_\alpha$ folgt dann $\underline{\lambda}_{\beta_0} < i(\underline{\lambda}_\alpha)$. Angenommen es sei $i(\underline{\lambda}_\alpha)(y) = \lambda_0$ für mindestens ein $y \in Y$. Dann bilden die Mengen $U = \{y \in Y \mid i(\underline{\lambda}_\alpha)(y) = \lambda_0\}$ und $O = \{y \in Y \mid \lambda_0 < i(\underline{\lambda}_\alpha)(y)\}$ eine Zerlegung von Y in disjunkte offene Mengen. Somit wird durch

$$g(y) = \begin{cases} \lambda & \text{falls } y \in U \\ \lambda_0 & \text{falls } y \in O \end{cases}$$

eine stetige Abbildung von Y in D_β definiert. Wegen $\underline{\lambda}_{\beta_0} < g$ und $g \wedge i(\underline{\lambda}_\alpha) = \underline{\lambda}_{\beta_0}$ hat man $i^{-1}(g) \wedge \underline{\lambda}_\alpha = \lambda_0$, das heißt $i^{-1}(g) = \underline{\lambda}_{\alpha_0}$. Es folgt $g = i i^{-1}(g) = i(\underline{\lambda}_{\alpha_0}) = \underline{\lambda}_{\beta_0}$, ein Widerspruch. Somit gilt $\underline{\lambda}_{\beta_0} \leq i(\underline{\lambda}_\alpha)$. Da $i(\underline{\lambda}_\alpha)$ unmittelbarer Nachfolger von $\underline{\lambda}_{\beta_0} = i(\underline{\lambda}_{\alpha_0})$ ist, folgt $i(\underline{\lambda}_\alpha) = \underline{\lambda}_{\beta_0}$.

Unmittelbar aus dem vorangehenden Lemma folgt:

10.2 Satz K sei eine wohlgeordnete Kette. Dann sind in $\mathcal{L}(K)$ verbandsisomorphe Objekte auch K-isomorph.

10.3 Satz Für verschiedene Ordinalzahlen α, β sind die Kategorien $\mathcal{L}(\alpha)$ und $\mathcal{L}(\beta)$ disjunkt, das heißt es gibt in $\mathcal{L}(\alpha)$ kein Objekt, das zu irgend einem Objekt in $\mathcal{L}(\beta)$ verbandsisomorph ist.

Beweis: Es seien $\alpha < \beta, V \in |\mathcal{L}(\alpha)|, W \in |\mathcal{L}(\beta)|$ und es gebe einen Verbandsisomorphismus i von V in W . Dann werden folgende Fälle betrachtet.

- (a) α ist Limeszahl. Dann besitzt die Menge C aller konstanten Funktionen in V keine obere Schranke, während $i(C)$ in W eine obere Schranke hat. Das ist ein Widerspruch.
- (b) Besitzt α einen unmittelbaren Vorgänger α_0 , so ist α_0 größtes Element in V , während $i(\alpha_0)$ diese Eigenschaft nicht hat, was ebenfalls nicht möglich ist.

Es heißen zwei Ordinalzahlen α, β $\mathcal{K}$ -äquivalent, falls $\mathcal{K}(D_\alpha) = \mathcal{K}(D_\beta)$. Die Frage, wann Ordinalzahlen $\mathcal{K}$ -äquivalent sind, hat Blefko in [3] ausführlich untersucht. Jeder $\mathcal{K}$ -Äquivalenzklasse läßt sich eine Klasse disjunkter zueinander äquivalenter Verbandskategorien zuordnen.

In der Theorie der Verbände ist die Frage, welche Verbände Dedekind-vollständig sind, das heißt die Eigenschaft besitzen, daß jede beschränkte Menge ein Supremum und ein Infimum besitzt, von gewisser Bedeutung. Für Dedekind-vollständige Ketten K lassen sich in den Kategorien $\mathcal{C}(K)$ solche Verbände schön beschreiben.

10.4 Lemma Es seien K eine Kette, X ein K -regulärer Raum, V eine offene Menge in X , $a, b \in K$ mit $a < b$ und B die Menge aller Funktionen in $(X, K)_{\text{Top}}$, die kleiner oder gleich b sind und in $X \setminus V$ den Wert a annehmen. Existiert $f = \sup B$ in $(X, K)_{\text{Top}}$, so gilt $f(x) = b$ für alle $x \in V$ und $f(x) = a$ für alle $x \in X \setminus V$.

Beweis: Zu jedem $x \in V$ existiert ein $g_x \in B$ mit $g_x(x) = b$. Es folgt $g_x \leq f \leq b$ für alle $x \in V$ und somit $f(x) = b$ für alle $x \in V$. Ist $x \in X \setminus V$, so gibt es ein $h \in (X, K)_{\text{Top}}$ mit $a \leq h$, $h(x) = a$ und $h(y) = b$ für alle $y \in V$. Es folgt $g_x \leq h$ für alle $g_x \in B$ und somit $f \leq h$, das heißt $f(x) = a$.

10.5 Definition $\{f_i\}_{i \in I}$ sei eine Familie von Funktionen in $(X, K)_{\text{Top}}$. Für jedes $r \in K$ sei

$$U_r = \begin{cases} \text{cl}_{i \in I} \{x \mid r < f_i(x)\} & \text{falls } r \text{ nicht kleinstes Element in } K \\ X & \text{falls } r \text{ kleinstes Element in } K \end{cases}$$

10.6 Lemma Es seien X ein topologischer Raum, $\{f_i\}_{i \in I}$ eine Familie von Funktionen in $(X, K)_{\text{Top}}$ und $g \in (X, K)_{\text{Top}}$ obere Schranke dieser Familie. Dann gilt $\sup\{r \mid x \in U_r\} \leq g(x)$ für alle $x \in X$.

Beweis: Sei $s \in K$ und $g(x) < s$. Dann gibt es eine offene Umgebung O von x , so daß $g(y) < s$ für alle $y \in O$. Wegen $f_i \leq g$ für alle $i \in I$ hat man $f_i(y) < s$ für alle $y \in O$ und $i \in I$. Es folgt $O \cap (\bigcup_{i \in I} \{x \mid s < f_i(x)\}) = \emptyset$ und somit $x \notin U_s$. Für alle

$x \in X$ und $s \in K$ mit $g(x) < s$ gilt daher $x \notin U_s$.

Angenommen $g(x) < s = \sup \{ r \mid x \in U_r \}$. Dann unterscheiden wir folgende Fälle.

- (a) s ist unmittelbarer Nachfolger von $g(x)$. Wegen $x \notin U_r$ für $s < r$ ist dann $g(x)$ obere Schranke von $\{ r \mid x \in U_r \}$. Das ist ein Widerspruch.
- (b) Ist s kein unmittelbarer Nachfolger von $g(x)$, so gibt es ein $t \in K$ mit $g(x) < t < s$. Für alle r , $t < r$ hat man $x \notin U_r$ und somit ist t obere Schranke von $\{ r \mid x \in U_r \}$, was wiederum nicht möglich ist.

10.7 Lemma Es seien X ein beliebiger Raum und K eine Dedekind-vollständige Kette. Für jedes $r \in K$ sei U_r eine offene Menge in X und es gelte

$$X = \bigcup_{r \in K} U_r, \quad \bigcap_{r \in K} U_r = \emptyset \quad \text{und} \quad \text{cl} U_r \subseteq U_s \text{ falls } s < r.$$

Dann wird durch $f(x) = \sup \{ r \in K \mid x \in U_r \}$ eine stetige Abbildung von X in K definiert.

Beweis: f ist auf Grund der Voraussetzungen wohldefiniert. Aus $x \in U_r$ folgt $r \leq f(x)$ und mit $r < f(x)$ erhält man $x \in U_r$, denn wäre $x \notin U_r$, so hätte man $x \notin U_s$ für alle $r < s$, das heißt $\sup \{ r \in K \mid x \in U_r \} \leq r$. Weiter folgt aus $x \in \text{cl} U_r$, $x \in U_s$ für alle $s < r$, so daß $r \leq f(x)$ ist.

Sei jetzt $a \in X$. Die (r, s) mit $r < f(a) < s$ bilden eine Umgebungsbasis von $f(a)$. Mit den obigen Bemerkungen folgt, daß die Mengen $U_r \setminus \text{cl} U_s$ Umgebungen von a sind, deren Bilder unter f ganz in $[r, s]$ liegen. Somit ist f stetig.

Ein topologischer Raum X heißt extrem unzusammenhängend, wenn jede offene Menge O in X die Eigenschaft besitzt, daß $\text{cl} O$ offen ist.

10.8 Satz Es seien K eine Dedekind-vollständige Kette und X ein K -regulärer topologischer Raum. Dann sind äquivalent

- (a) X ist extrem unzusammenhängend,
- (b) $(X, K)_{\text{Top}}$ ist Dedekind-vollständig.

Beweis: (a) impliziert (b): Sei $\{f_i\}_{i \in I}$ eine Familie stetiger Funktionen von X in K , die $g \in (X, K)_{\text{Top}}$ als obere Schranke besitzt. Da X extrem unzusammenhängend ist, haben die in 10.5 definierten Mengen U_r die in 10.7 geforderten Eigenschaften. Somit wird durch $f(x) = \sup\{r \in K \mid x \in U_r\}$ eine stetige Funktion von X in K definiert, die nach 10.6 Supremum von $\{f_i\}_{i \in I}$ ist. Die Existenz des Infimums ergibt sich dual.

(b) impliziert (a): Es seien $(X, K)_{\text{Top}}$ Dedekind-vollständig, $a, b \in K$ mit $a < b$, V eine offene Menge in X und B die Gesamtheit aller stetigen Funktionen, die kleiner oder gleich b sind und auf $X \setminus V$ den Wert a annehmen. Ist f das Supremum von B , so folgt mit 10.4 $f(x) = b$ für alle $x \in V$ und $f(y) = a$ für alle $y \in X \setminus \text{cl} V$. Da $\text{cl} V \in f^{-1}(b)$ ist $\text{cl} V$ dann eine offene Menge und X extrem unzusammenhängend.

Die Frage nach freien Objekten in den Kategorien $\mathcal{C}(K)$ beantwortet der folgende Satz.

10.9 Satz In $\mathcal{C}(K)$ ist $(K, K)_{\text{Top}}$ frei über jedem Homöomorphismus $i \in (K, K)_{\text{Top}}$.

Beweis: Sei $(X, K)_{\text{Top}} \in |\mathcal{C}(K)|$ und $g \in (X, K)_{\text{Top}}$. Dann ist ein eindeutig bestimmter K -Homomorphismus $\varphi: (K, K)_{\text{Top}} \rightarrow (X, K)_{\text{Top}}$ gesucht, der i in g überführt.

Setzt man $\varphi = (i^{-1}g, K)_{\text{Top}}$, so gilt $\varphi(i) = g$. Angenommen es gibt einen von φ verschiedenen K -Homomorphismus ψ von $(K, K)_{\text{Top}}$ in $(X, K)_{\text{Top}}$ mit $\psi(i) = g$. Dann ist $\psi(f) \neq \varphi(f)$ für ein $f \in (K, K)_{\text{Top}}$ und es gibt eine Projektion p von K^X in K , so daß $p\varphi(f) \neq p\psi(f)$. Nun sind $p\varphi$ und $p\psi$ K -Homomorphismen von $(K, K)_{\text{Top}}$ in K und somit fest in Punkten a, b in K , wobei $a \neq b$. Es folgt $i(a) = p\varphi(i) = pg = p\psi(i) = i(b)$. Da $a \neq b$ und i als Homöomorphismus bijektiv ist, ergibt sich ein Widerspruch.

Bekannt ist der folgende

10.10 Satz $\mathcal{L}$ sei eine Kategorie, in der die Objekte strukturierte Menge und die Morphismen Abbildungen sind. Ist jedes Objekt F_i in $\{F_i\}_{i \in I}$ freies Objekt in $\mathcal{L}$ über einer Menge E_i der Mächtigkeit α_i , so ist das Coprodukt der F_i frei über einer Menge der Mächtigkeit $\sum \alpha_i$.

10.11 Satz Für jede Indexmenge I ist $(K^I, K)_{\text{Top}}$ in $\mathcal{L}(K)$ frei über einer Menge der Mächtigkeit $|I|$.

Beweis: $(K, K)_{\text{Top}}$ ist nach 10.9 frei von der Mächtigkeit 1 und $(K^I, K)_{\text{Top}}$ ist auf Grund der Dualität Coprodukt von $(K, K)_{\text{Top}}$.

10.12 Satz Es seien $(X, K)_{\text{Top}}, (Y, K)_{\text{Top}} \in \mathcal{L}(K)$ und ψ ein K -Homomorphismus von $(X, K)_{\text{Top}}$ in $(Y, K)_{\text{Top}}$. Dann sind äquivalent

- (a) ψ ist injektiv,
- (b) ψ ist Monomorphismus.

Beweis: Bekannt ist, daß jede injektive Abbildung ein Monomorphismus ist. Sei umgekehrt ψ ein Monomorphismus, der nicht injektiv ist. Dann gibt es $f, g \in (X, K)_{\text{Top}}$ $f \neq g$, so daß $\psi(f) = \psi(g)$. Da $(K, K)_{\text{Top}}$ frei über $1_K \in (K, K)_{\text{Top}}$, gibt es $\alpha, \beta: (K, K)_{\text{Top}} \rightarrow (X, K)_{\text{Top}}$ mit $\alpha(1_K) = f$ und $\beta(1_K) = g$. $\psi\alpha$ und $\psi\beta$ sind dann Morphismen von $(K, K)_{\text{Top}}$ in $(X, K)_{\text{Top}}$ mit $\psi\alpha(1_K) = \psi\beta(1_K)$. Auf Grund der eindeutigen Fortsetzbarkeit erhält man $\psi\alpha = \psi\beta$ und da ψ Monomorphismus $\alpha = \beta$. Das ist ein Widerspruch.

§ 11 Folgerungen aus der Dualität

Es sollen in diesem Paragraphen wichtige Sätze, die sich in einfacher Weise aus den bisherigen Ergebnissen ableiten lassen, zusammengestellt werden.

11.1 Satz X, Y seien K -kompakte Räume. Dann sind äquivalent

- (a) X und Y sind homöomorph,
- (b) $(X, K)_{\text{Top}}$ und $(Y, K)_{\text{Top}}$ sind K -isomorph.

11.2 Satz Es seien $K = \mathbb{D}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$ und X, Y K -kompakte Räume. Dann sind äquivalent

- (a) X und Y sind homöomorph,
- (b) $(X, K)_{\text{Top}}$ und $(Y, K)_{\text{Top}}$ sind als Ringe isomorph,
- (c) $(X, K)_{\text{Top}}$ und $(Y, K)_{\text{Top}}$ sind K -isomorph.

Allgemein wurde in 10.2 für Ordinalketten K bewiesen, daß in den zugehörigen Kategorien $\mathcal{L}(K)$ die Begriffe K -isomorph und Verbandsisomorph zusammenfallen. Beachtet man, daß wegen der additiven Struktur zu isomorphen Verbänden $(X, \mathbb{Z})_{\text{Top}}$ und $(Y, \mathbb{Z})_{\text{Top}}$ ein Isomorphismus von $(X, \mathbb{Z})_{\text{Top}}$ in $(Y, \mathbb{Z})_{\text{Top}}$ existiert, der $\underline{0}$ in $\underline{0}$ überführt, so ergibt sich, daß auch für $\mathbb{Z}$ die beiden Isomorphiebegriffe zusammenfallen. Ein von Mrowka 17 bewiesener Satz ist somit ein Spezialfall von 11.2.

Ungelöst ist das Problem, wie die Gesamtheit aller Ketten K aussieht, für welche in den Kategorien $\mathcal{L}(K)$ die Begriffe Verbandsisomorph und K -isomorph zusammenfallen. Wir haben gezeigt, daß Ordinalketten und $\mathbb{Z}$ diese Eigenschaft besitzen. Aus einem Satz von Shirota [18], der besagt, daß reellkompakte Räume genau dann homöomorph sind, wenn die zugehörigen Verbände reellwertiger Funktionen Verbandsisomorph sind, folgt, daß $\mathbb{R}$ ebenfalls zu der gesuchten Menge gehört. Es fehlt jedoch ein di-

rekter Beweis.

Es ist bekannt, daß in den Kategorien $\mathcal{K}(I)$ und $\mathcal{K}(D)$ die Begriffe Monomorphismus und injektive Abbildung bzw. Epimorphismus und surjektive Abbildung zusammenfallen. Daß die entsprechenden Aussagen auch in den dualen Kategorien richtig bleiben, ergibt sich aus 10.12 und dem folgenden Satz.

11.3 Satz Es sei t ein Morphismus in $\mathcal{C}(I)$ oder $\mathcal{C}(n)$. Dann ist t genau dann Epimorphismus, wenn t surjektiv ist.

Beweis: Bekannt ist, daß jede surjektive Abbildung ein Epimorphismus ist. Umgekehrt sei t ein Epimorphismus in $\mathcal{C}(n)$, der von einer stetigen Abbildung $f: X \rightarrow Y$ induziert wird. Man hat zu zeigen, daß zu jedem $g \in (Y, D_n)_{\text{Top}}$ ein $\bar{g} \in (X, D_n)_{\text{Top}}$ existiert, so daß $\bar{g}f = g$. Auf Grund der Dualität ist f monomorph und daher injektiv. Die Mengen $f(g^{-1}(i))$ sind dann für $i=1, 2, \dots, n-1$ disjunkt und abgeschlossen. Da X nulldimensional und kompakt ist, gibt es disjunkte offene Mengen $O_1, \dots, O_{n-1}$, die X überdecken und für die $f(g^{-1}(i)) \subseteq O_i$ gilt. Definiert man $\bar{g}(x) = i$ für alle $x \in O_i$, so hat $\bar{g}$ die gewünschten Eigenschaften.

Ersetzt man die Kette D_n durch das Einheitsintervall I , so ergibt sich die Existenz von $\bar{g}$ daraus, daß $f(Y)$ ein zu Y homöomorpher abgeschlossener Unterraum von X ist und sich $hf^{-1}: f(Y) \rightarrow I$ zu einer stetigen Abbildung $\bar{g}: X \rightarrow I$ fortsetzen läßt.

Ein Objekt B einer Kategorie $\mathcal{C}$ heiße projektiv, wenn zu beliebigen $A, C \in \mathcal{C}$, $f \in (A, C)_{\mathcal{C}}$, $h \in (B, C)_{\mathcal{C}}$, wobei f Epimorphismus ist, ein $g \in (A, B)_{\mathcal{C}}$ existiert, so daß $gh = f$. Der duale Begriff zu projektiv ist injektiv. In [6] untersuchte Gleason die projektiven Objekte in der Kategorie der kom-

pakten topologischen Räume. Er erhielt folgendes Resultat.

- 11.4 Satz Für Objekte X in $\mathcal{H}(I)$ und $\mathcal{H}(D)$ sind äquivalent
- (a) X ist projektiv,
 - (b) X ist extrem unzusammenhängend.

Mit Hilfe der Dualität erhält man sofort

- 11.5 Satz Für Objekte V in $\mathcal{C}(I)$ und $\mathcal{C}(n)$ sind äquivalent
- (a) V ist injektiv,
 - (b) V ist Dedekind-vollständig.

Weiter sind in den Kategorien $\mathcal{C}(I)$ und $\mathcal{C}(n)$ die freien Objekte stets projektiv. Man erhält

- 11.6 Satz Für $K = D_n, I$ und beliebige Indexmengen J gilt:
- (a) $(K^J, K)_{\text{Top}}$ ist projektiv in $\mathcal{C}(K)$.
 - (b) K^J ist injektiv in $\mathcal{H}(K)$.

Literatur

- [1] Balbes, R. : Projective and injective distributive lattices, Pac. J. o. Math. 21 (1967) 405-420.
- [2] Birkhoff, G. : Lattice theory, Am. Math. Soc. Coll. Publ. 25, (1948).
- [3] Blefko, R.L. : On E-compact spaces, Dissertation, Pennsylvania State University, (1965).
- [4] Engelking, R. und Mrowka, S. : On E-compact spaces, Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III 6, (1958) 429-436.
- [5] Gillman, L. und Jerison, M. : Rings of continuous functions, New York, (1960).
- [6] Gleason, A.M. : Projective topological Spaces, Ill. J. Math. 2, (1958), 482-489.
- [7] Halmos, P.R. : Lectures on Boolean algebras, New York (1960).
- [8] Herrlich, H. : Reflexionen und Coreflexionen, Vorlesungsskript , Berlin (1968).
- [9] _____ : $\mathcal{E}$ -kompakte Räume, Habilitationsschrift, Berlin (1965)
- [10] _____ : $\mathcal{E}$ -kompakte Räume, Math. Zeitschr. 96 (1967) 228-255.
- [11] _____ : Fortsetzbarkeit stetiger Abbildungen und Kompaktheitsgrad topologischer Räume, Math. Zeitschr. 96 (1967) 64-72.
- [12] _____ : On the concept of reflection in general topology, Proc. of the Symp. o. Extension Theory, Berlin, (1967) erscheint.
- [13] Jensen, G.A. : Characterizations of the lattice of all real-valued continuous functions on a completely regular space, Dissertation, Purdue University, (1966).
- [14] Kaplansky, I. : Lattices of continuous functions, Bull. Am. Math. Soc. 53 (1947) 617-622.
- [15] Mrowka, S. : Further results on E-compact spaces, Acta mathematica 120 (1968)

- [16] Mrowka, S. : A property of Hewitt-extension $\vee X$ of topological spaces, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astr. Phys. 6 (1958) 95-96.
- [17] _____ :: Structures of continuous functions III, Ind. Math. 27, (1965) 74-82.
- [18] Shirota, T. : A generalization of a theorem of I. Kaplansky, Osaka Math. J. 4 (1952) 121-132.
- [19] Shore, S.D. : On lattices of chain valued continuous funktions, Preprint, University of New Hamshire (1967).
- [20] Sikorski, R. : Boolean Algebras, Berlin (1964).
- [21] Strauß, D.P. : Extrem disconnected spaces, Proc. Am. Math. Soc. 18 (1967) 305-309.
- [22] Stone, M.H. : Applications of the theory of Boolean rings to general topology, Trans. Am. Math. Soc. 41 (1937) 375-481.

Lebenslauf des Verfassers

Am 3. Januar 1942 wurde ich als Sohn des Ingenieurs Siegfried Brucker und dessen Ehefrau Ursel Brucker geb. Schwarze in Berlin geboren. Ab Ostern 1948 besuchte ich Grundschulen in Neumünster und Berlin. 1953 trat ich in das Realgymnasium für Jungen der Stadt Hanau am Main ein und legte dort Ostern 1961 meine Reifeprüfung ab.

Seit dem Sommersemester 1961 studierte ich an der Freien Universität in Berlin die Fächer Mathematik und Physik. Meine Lehrer während des Hochschulstudiums waren in Mathematik die Professoren Dinghas, Grottemeyer, Pachale, Ringel, Stöhr, Berger sowie Dr. Engel und in Physik die Professoren Honerjäger, Wilking und Lassen.

Die Diplomvorprüfung bestand ich 1963, die Diplomhauptprüfung in Mathematik 1966.

Seit Januar 1967 bin ich an der Freien Universität als wissenschaftlicher Mitarbeiter angestellt.

Die vorliegende Arbeit entstand unter der Leitung des Privatdozenten Dr. Herrlich.

